תרגיל:

$$xu_x + yu_y + \frac{z}{2}u_z = 0$$

$$u(1,y,z) = y + z^2$$

א) מצא פתרון כללי.

ב) מצא פתרון פרטי.

פתרון:

$$a = x\ , b = y, c = \frac{z}{2}\ , d = 0$$

מאחר והמשוואה הומוגנית, נוכל להגיד כי –

$$\varphi_1(x,y,z,u) = u(x,y,z) = c_1$$

שיטת לגרנז':

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{\frac{z}{2}}$$

נבחר 2 משוואות:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \Rightarrow \ln x = \ln y + \widetilde{c_2} \Rightarrow \widetilde{c_2} = \ln\left(\frac{x}{y}\right) \Rightarrow \boxed{\frac{x}{y} = c_2 = \varphi_2}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{\frac{z}{2}} \Rightarrow \ln x = 2\ln z + \widetilde{c_3} \Rightarrow \ln\left(\frac{x}{z^2}\right) = \widetilde{c_3} \Rightarrow \boxed{\frac{x}{z^2} = c_3 = \varphi_3}$$

א) <u>פתרון כללי:</u>

$$F(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = 0$$

או בצורה יותר נוחה עבור המקרה שלנו:

$$F(\varphi_2, \varphi_3) = \varphi_1$$

$$F\left(\frac{x}{y}, \frac{x}{z^2}\right) = u(x,y,z)$$

ב) <u>פתרון פרטי:</u>

$$y + z^2 = u(1,y,z) = F\left(\frac{1}{y}, \frac{1}{z^2}\right)$$

נסמן: $t_1 = \frac{1}{y}\ , t_2 = \frac{1}{z^2}$ ואז –

$$F(t_1, t_2) = \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2}$$

לכן –

$$u(x,y,z) = F\left(\frac{x}{y},\frac{x}{z^2}\right) = \frac{y}{x} + \frac{z^2}{x} = \frac{y+z^2}{x}$$

לכן, הפתרון הפרטי הוא:

$$\boxed{u = \frac{y+z^2}{x}}\ ,x \neq 0$$

שיטת קווים אופיינים למד"ח קוואזי לינארית מסדר I עם n משתנים/מימדים

מד"ח קוואזי לינארית עבור פונקציה $u(x_1,\dots,x_n)$ היא מהצורה:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} a_i(x_1,\dots,x_n,u)u_{x_i} = c(x_1,\dots,x_n,u)}$$

תנאי התחלה עבור המשוואה הנ"ל היא משטח על עם $n-1$ מימדים שנסמנו ב – Γ. נציג את Γ בצורה פרמטרית:

$$\begin{cases} x_{0,i} = x_i(0,s_1,\dots,s_{n-1}), \qquad i=1,\dots,n \\ u_0 = u(0,s_1,\dots,s_{n-1}) \end{cases}$$

תנאי החיתוך במקרה הנ"ל:

$$J|_\Gamma = \frac{\partial(x_1,x_2,\dots,x_n)}{\partial(t,s_1,\dots,s_{n-1})} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_{0,1}}{\partial t} & \frac{\partial x_{0,2}}{\partial t} & \cdots & \frac{\partial x_{0,n}}{\partial t} \\ \frac{\partial x_{0,1}}{\partial s_1} & \frac{\partial x_{0,2}}{\partial s_1} & \cdots & \frac{\partial x_{0,n}}{\partial s_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial x_{0,1}}{\partial s_{n-1}} & \frac{\partial x_{0,2}}{\partial s_{n-1}} & \cdots & \frac{\partial x_{0,n}}{\partial s_{n-1}} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \frac{\partial x_{0,1}}{\partial s_1} & \frac{\partial x_{0,2}}{\partial s_1} & \cdots & \frac{\partial x_{0,n}}{\partial s_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial x_{0,1}}{\partial s_{n-1}} & \frac{\partial x_{0,2}}{\partial s_{n-1}} & \cdots & \frac{\partial x_{0,n}}{\partial s_{n-1}} \end{vmatrix} \neq 0$$

אז באופן מקומי ניתן לחזור למשתנים $(x_1,\dots,x_n)$.

<u>תרגיל:</u>

$$\begin{cases} xu_x + yu_y + zu_z = 4u \\ u(x,y,1) = xy \end{cases}$$

פתור בעזרת שיטת קווים אופיינים.

<u>פתרון:</u>

משוואות האופייניות:

$$\begin{cases} x_t = x \Rightarrow \frac{dx}{dt} = x \Rightarrow \frac{dx}{x} = 1\,dt \Rightarrow \ln\big(x(t,s_1,s_2)\big) = t + \widetilde{f_1}(s_1,s_2) \Rightarrow x(t,s_1,s_2) = e^t f_1(s_1,s_2) \\ y_t = y \Rightarrow \frac{dy}{dt} = y \Rightarrow \frac{dy}{y} = 1\,dt \Rightarrow \ln\big(y(t,s_1,s_2)\big) = t + \widetilde{f_2}(s_1,s_2) \Rightarrow y(t,s_1,s_2) = e^t f_2(s_1,s_2) \\ z_t = z \Rightarrow \frac{dz}{dt} = z \Rightarrow \frac{dz}{z} = 1\,dt \Rightarrow \ln\big(z(t,s_1,s_2)\big) = t + \widetilde{f_3}(s_1,s_2) \Rightarrow z(t,s_1,s_2) = e^t f_3(s_1,s_2) \\ u_t = u \Rightarrow \frac{du}{dt} = 4u \Rightarrow \frac{du}{4u} = 1\,dt \Rightarrow \ln\big(u(t,s_1,s_2)\big) = 4t + \widetilde{f_4}(s_1,s_2) \Rightarrow u(t,s_1,s_2) = e^{4t} f_4(s_1,s_2) \end{cases}$$

כעת, מתנאי ההתחלה:

$$x(0,s_1,s_2)=s_1$$

$$y(0,s_1,s_2)=s_2$$

$$z(0,s_1,s_2)=1$$

$$u(0,s_1,s_2)=s_1\cdot s_2$$

לכן:

$$s_1=x(0,s_1,s_2)=f_1(s_1,s_2)$$

$$s_2=y(0,s_1,s_2)=f_2(s_1,s_2)$$

$$1=z(0,s_1,s_2)=f_3(s_1,s_2)$$

$$s_1\cdot s_2=u(0,s_1,s_2)=f_4(s_1,s_2)$$

ואז:

$$\begin{cases} x(t,s_1,s_2)=e^t\cdot s_1 \\ y(t,s_1,s_2)=e^t\cdot s_2 \\ z(t,s_1,s_2)=e^t \\ u(t,s_1,s_2)=e^{4t}\cdot s_1\cdot s_2 \end{cases}$$

נבדוק יעקוביאן:

$$J|_\Gamma=\begin{vmatrix} x'_t(0,s_1,s_2) & y'_t(0,s_1,s_2) & z'_t(0,s_1,s_2) \\ x'_{s_1}(0,s_1,s_2) & y'_{s_1}(0,s_1,s_2) & z'_{s_1}(0,s_1,s_2) \\ x'_{s_2}(0,s_1,s_2) & y'_{s_2}(0,s_1,s_2) & z'_{s_2}(0,s_1,s_2) \end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix} x(0,s_1,s_2) & y(0,s_1,s_2) & z(0,s_1,s_2) \\ x'_{s_1}(0,s_1,s_2) & y'_{s_1}(0,s_1,s_2) & z'_{s_1}(0,s_1,s_2) \\ x'_{s_2}(0,s_1,s_2) & y'_{s_2}(0,s_1,s_2) & z'_{s_2}(0,s_1,s_2) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} s_1 & s_2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}=1$$
$$\neq 0$$

לכן, נוכל לחזור למשתנים הקודמים:

$$0\neq z=e^t$$

$$x=z\cdot s_1\Rightarrow s_1=\frac{x}{z}$$

$$y=z_2\cdot s_2\Rightarrow s_2=\frac{y}{z}$$

ולכן:

$$u(x,y,z)=(e^t)^4\cdot s_1\cdot s_2=z^4\cdot\frac{x\cdot y}{z^2}=xyz^2$$

■

שיטת הפסים האופיינים

נתבון במד"ח מסדר I ב – n נעלמים בת"ל:

$$F\left(x_1, x_2, \dots, x_n, u, u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, u_{x_n}\right) = 0$$

בעיית קושי מורכבת מהמשוואה נ"ל יחד עם תנאי התחלה למשוואה.

תנאי התחלה הוא משטח על $n-1$ מימדי במרחב האוקלידי $\mathbb{R}^{n+1}$. ניעזר בשיטת הפסים האופיינים למצוא פתרון מקומי לבעיית קושי.

נסמן: $u_{x_i} = P_i$ ואז –

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, u, P_1, P_2, \dots, P_n) = 0$$

<u>בעיית מערכת הפסים האופיינים:</u>

$$2n+1 \text{ משוואות } \begin{cases} \dfrac{dx_i}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial P_i} \\ \dfrac{du}{dt} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} P_i \frac{\partial F}{\partial P_i} \\ \dfrac{dP_i}{dt} = -\dfrac{\partial F}{\partial x_i} - P_i \dfrac{\partial F}{\partial u} \end{cases}$$

כדי לקבל פתרון יחיד, עלינו לספק תנאי התחלה מתאים.

נסמן:

$$P_i(0, s_1, \dots, s_{n-1}) = P_{0,i}(s_1, \dots, s_{n-1})$$

עבור המשתנים $P_i(t, s_1, s_2, \dots, s_{n-1})$ חייב להתקיים שהפונקציה $P_{0,i}(s_1, \dots, s_{n-1})$ מקיימת את תנאי הדיפרנציאל:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_0(s_1, s_2, \dots, s_{n-1})}{\partial s_j} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} P_{0,i} \frac{\partial x_{0,i}(s_1, \dots, s_{n-1})}{\partial s_j}, \qquad j = 1, \dots, n-1 \\ F\left(x_{0,1}(\vec{s}), x_{0,2}(\vec{s}), \dots, x_{0,n}(\vec{s}), u_0(\vec{s}), P_{0,1}(\vec{s}), \dots, P_{0,n}(\vec{s})\right) = 0, \qquad \vec{s} = (s_1, \dots, s_{n-1}) \end{cases}$$

כאשר –

$$x_{0,i} = x_i(0, s_1, \dots, s_{n-1})$$

$$u_0 = u(0, s_1, \dots, s_{n-1})$$

$$P_{0,i} = P_i(0, s_1, \dots, s_{n-1})$$

<u>תרגיל:</u>

משוואת האיקונל ($Eikonal\ equation$) –

$$\begin{cases} u_x^2 + u_y^2 = n_0^2 \\ u(x, 2x) = 1 \end{cases}$$

כאשר n_0 קבוע.

מצא פתרון למשוואה ע"י שיטת פסים אופיינים.

<u>פתרון:</u>

המשוואה שלנו:

$$F(x,y,u,u_x,u_y)=u_x^2+u_y^2-n_0^2=0$$

נסמן:

$$u_x=P_1\,,u_y=P_2$$

לכן –

$$F(x,y,u,P_1,P_2)=P_1^2+P_2^2-n_0^2=0$$

<u>מערכת הפסים האופיינים:</u>

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\partial F}{\partial P_1}$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{\partial F}{\partial P_2}$$

$$\frac{du}{dt}=P_1\cdot\frac{\partial F}{\partial P_1}+P_2\cdot\frac{\partial F}{\partial P_2}$$

$$\frac{dP_1}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial x}-P_1\cdot\frac{\partial F}{\partial u}=0$$

$$\frac{dP_2}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial y}-P_2\cdot\frac{\partial F}{\partial u}=0$$

לכן –

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=2P_1\\ \frac{dy}{dt}=2P_2\\ \frac{du}{dt}=P_1\cdot 2P_1+P_2\cdot 2P_2=2P_1^2+2P_2^2=2n_0^2\\ \frac{dP_1}{dt}=0\\ \frac{dP_2}{dt}=0\end{cases}$$

משתי המשוואות האחרונות נקבל:

$$P_1(t,s)=f_1(s)$$

$$P_2(t,s)=f_2(s)$$

מהמשוואה השלישית נקבל:

$$\frac{du}{dt} = 2n_0^2 \Rightarrow u(t,s) = 2n_0^2 t + f_3(s)$$

ושתי המשוואות הראשונות נותנות:

$$\frac{dx}{dt} = 2f_1(s) \Rightarrow x(t,s) = 2f_1(s)t + f_4(s)$$

$$\frac{dy}{dt} = 2f_2(s) \Rightarrow y(t,s) = 2f_2(s)t + f_5(s)$$

כעת, נסתכל על תנאי ההתחלה:

$$\begin{cases} u(x,y) = 1 \\ y = 2x \text{ כאשר} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(0,s) = s \\ y(0,s) = 2s \\ u(0,s) = 1 \end{cases}$$

לכן:

$$\Gamma = \big(x(0,s), y(0,s), u(0,s), P_1(0,s), P_2(0,s)\big)$$

ואז:

$$F\big(x(0,s), y(0,s), u(0,s), P_1(0,s), P_2(0,s)\big) = 0$$

$$F\big(s, 2s, 1, P_1(0,s), P_2(0,s)\big) = 0$$

$$F = P_1^2 + P_2^2 - n_0^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\big(P_1(0,s)\big)^2 + \big(P_2(0,s)\big)^2 - n_0^2 = 0}$$

$$\frac{\partial u(0,s)}{\partial s} = P_1(0,s)\frac{\partial x(0,s)}{\partial s} + P_2(0,s)\frac{y(0,s)}{\partial s}$$

$$\boxed{0 = P_1(0,s) + P_2(0,s)\cdot 2}$$

קיבלנו מערכת של שתי משוואות:

$$\begin{cases} P_1(0,s) + 2P_2(0,s) = 0 \\ \big(P_1(0,s)\big)^2 + \big(P_2(0,s)\big)^2 - n_0^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow P_1(0,s) = -2P_2(0,s)$$

$$\Rightarrow 4P_2(0,s)^2 + P_2(0,s)^2 = n_0^2$$

$$5P_2(0,s)^2 = n_0^2$$

נקבל:

$$\boxed{P_2(0,s) = \frac{n_0}{\sqrt{5}}}$$

$$\boxed{P_1(0,s) = -\frac{2n_0}{\sqrt{5}}}$$

נציב בחזרה:

$$P_1(t,s) = f_1(s) \Rightarrow P_1(0,s) = f_1(s) = -\frac{2n_0}{\sqrt{5}}$$

$$P_2(t,s) = f_2(s) \Rightarrow P_1(0,s) = \frac{n_0}{\sqrt{5}}$$

נזכור כי:

$$x(t,s) = 2f_1(s)t + f_3(s) = -\frac{4n_0}{\sqrt{5}}t + f_3(s)$$

$$y(t,s) = \frac{2n_0}{\sqrt{5}}t + f_4(s)$$

$$\Rightarrow s = x(0,s) = f_3(s)$$

$$\Rightarrow 2s = y(0,s) = f_4(s)$$

$$\boxed{x(t,s) = -\frac{4n_0}{\sqrt{5}}t + s}$$

$$\boxed{y(t,s) = \frac{2n_0}{\sqrt{5}}t + 2s}$$

$$u(t,s) = 2n_0^2 t + f_5(s)$$

$$\Rightarrow 1 = u(0,s) = f_5(s)$$

$$\boxed{u(t,s) = 2n_0^2 t + 1}$$

נבדוק את היעקוביאן:

$$J|_{(0,s)} = \begin{vmatrix} x_t(0,s) & y_t(0,s) \\ x_s(0,s) & y_s(0,s) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{4n_0}{\sqrt{5}} & \frac{2n_0}{\sqrt{5}} \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -\frac{10n_0}{\sqrt{5}} \neq 0$$

לכן, נוכל לחזור למשתנים המקוריים:

$$x = -\frac{4n_0}{\sqrt{5}}t + s$$

$$y = \frac{2n_0}{\sqrt{5}}t + 2s$$

$$\Rightarrow y - 2x = \frac{10n_0}{\sqrt{5}}t$$

ואז:

$$\boxed{u(x,y) = 1 + \frac{y-2x}{\sqrt{5}}n_0}$$

■

מיון מד"ח לינארית מסדר $\mathbb{I}$

$$\underbrace{a(x,y)u_{xy}+2b(x,y)u_{xy}+c(x,y)u_{yy}}_{\text{החלק העיקרי}}+F\big(x,y,u,u_x,u_y\big)=0$$

כדי לסווג את המד"ח, מסתכלים רק על החלק העיקרי.

נכתוב את הפולינום האופייני:

$$a(dy)^2-2bdxdy+c(dx)^2=0$$

$$a\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2b\left(\frac{dy}{dx}\right)+c=0$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{b\pm\sqrt{b^2-ac}}{a}}$$

לביטוי: $\Delta=b^2-ac$ קוראים דיסקרימיננטה ומסווגים לפי:

$\Delta>0$, המד"ח מסוג היפרבולי.

$\Delta=0$, המד"ח מסוג פרבולי.

$\Delta<0$, המד"ח מסוג אליפטית.

נסתכל על המשוואה הנ"ל (אחרי הפרדת משתנים) –

$$a\,dy=\big(b\pm\sqrt{\Delta}\big)dx$$

היפרבולי ← $\Delta>0$, יצאו שני פתרונות:

$$\int a\,dy=\int\big(b+\sqrt{\Delta}\big)dx$$

$$\int a\,dy=\int\big(b-\sqrt{\Delta}\big)dx$$

⇐ נקבל שתי משפחות של עקומים:

$$c_1(x,y)=P(x,y)$$

$$c_2(x,y)=Q(x,y)$$

פרבולי ← $\Delta=0$ ואז ישנו פתרון אחד:

$$\int a\,dy=\int b\,dx$$

$$c(x,y)=P(x,y)$$

נצטרך להשלים עוד משפחה של עקומים כך שיתקיים:

$$J=\frac{\partial(P,Q)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}P_x & P_y\\ Q_x & Q_y\end{vmatrix}\neq 0$$

בדר"כ $Q=x$ או $Q=y$.

במקרה האליפטי, $\Delta < 0$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm \sqrt{\Delta}}{a}$$

נקבל שני פתרונות מרוכבות צמודים. בפועל נפתור רק משוואה אחת:

$$a\,dy = \left(b + \sqrt{\Delta}\right)dx$$

$$c_1 = \varphi(x, y) = Re(\varphi) + i \cdot Im(\varphi)$$

$$P(x, y) = Re(\varphi)$$

$$Q(x, y) = Im(\varphi)$$