תרגול 9 אינפי 3

17 בינואר 2015

<u>תרגיל:</u>

מצאו נקודות קריטיות עבור הפונקציה הבאה וסווגו אותן:

$$f(x,y,z) = x^4 + y^4 + z^4 - 2a^2(x^2 + y^2 + z^2)$$

כאשר $a > 0$.

<u>פתרון:</u>

בנוהל, נשווה את הגדיאנט ל-0:

$$f_x = 4x^3 - 4a^2x = 0$$

$$f_y = 4y^3 - 4a^2y = 0$$

$$f_z = 4z^3 - 4a^2z = 0$$

ונקבל שהפתרונות מקיימים $x, y, z \in \{0, a, -a\}$, כלומר יש 27 נקודות קריטיות.

מטריצת ההסיאן היא:

$$H_f = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 12y^2 - 4a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 12z^2 - 4z^2 \end{pmatrix}$$

עבור הנקודה $(0,0,0)$, נקבל את המטריצה:

$$\begin{pmatrix} -4a^2 & 0 & 0 \\ 0 & -4a^2 & 0 \\ 0 & 0 & -4a^2 \end{pmatrix}$$

זו מטריצה שלילית לחלוטין ולכן הנקודה $(0,0,0)$ היא נקודת מקסימום.
עבור נקודות מהצורה $(\pm a,0,0)$ נקבל את המטריצה:

$$\begin{pmatrix} 8a^2 & 0 & 0 \\ 0 & -4a^2 & 0 \\ 0 & 0 & -4a^2 \end{pmatrix}$$

זו מטריצה עם ערך עצמי חיובי ושניים שליליים ולכן הנקודות הן נקודות אוכף.
באופן דומה, גם הנקודות $(0,\pm a,0),(0,0,\pm a)$ הן נקודות אוכף.
עבור נקודות מהצורה $(\pm a,\pm a,0)$ נקבל את המטריצה:

$$\begin{pmatrix} 8a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 8a^2 & 0 \\ 0 & 0 & -4a^2 \end{pmatrix}$$

זו מטריצה עם ערך עצמי אחד שלילי ושניים חיוביים, ולכן הנקודות הן נקודות אוכף.
באופן דומה, גם הנקודות $(\pm a,0,\pm a),(0,\pm a,\pm a)$ הן נקודות אוכף.
בנקודות מהצורה $(\pm a,\pm a,\pm a)$ נקבל את המטריצה:

$$\begin{pmatrix} 8a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 8a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 8a^2 \end{pmatrix}$$

זו מטריצה חיובית לחלוטין ולכן אלו נקודות מינימום.

<u>תרגיל:</u>

מצאו נקודות קיצון מקומיות עבור הפונקציה:

$$f(x,y)=3xe^y-x^3-e^{3y}$$

האם אלו נקודות קיצון גלובאליות?

<u>פתרון:</u>

נשווה את הגרדיאנט ל-0:

$$f_x=3e^y-3x^2=0$$

$$f_y=3xe^y-3e^{3y}=0$$

נפתור את המשוואות ונקבל את הנקודה $(1,0)$.
מטריצת ההסיאן היא:

$$H_f = \begin{pmatrix} -6x & 3e^y \\ 3e^y & 3xe^y - 9e^{3y} \end{pmatrix}$$

ובנקודה $(1,0)$ שלנו:

$$\begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$$

הערכים העצמיים שניהם שליליים ולכן זו נקודת מקסימום.
מבחינה גלובאלית, אין לפונקציה נקודות קיצון; הערך בנקודה שלנו הוא:

$$f(1,0) = 2$$

אך למשל בנקודה $(-10,0)$ נקבל את הערך:

$$f(-10,0) = 969 > 2$$

ולכן אין קיצון גלובאליות.
<u>תרגיל:</u>
מצאו את המינימום והמקסימום הגלובאליים של

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - xy - 2x - 2y$$

במשולש שקודקודיו הם הנקודות $(0,0),(6,0),(0,6)$.
<u>פתרון:</u>
נעשה זאת בשלבים.
שלב ראשון - נחפש נקודות חשודות בתוך התחום.
שלב שני - נסתכל על הפונקציה שלנו כעל פונקציה של משתנה אחד על כל אחת מהצלעות ונחפש כך נקודות חשודות על הצלעות.
שלב שלישי - גם הקודקודים עצמם חשודים כקיצון (הם ה"קצוות של הקצוות"). נבדוק את כל הנקודות החשודות ונראה מי מהן המקסימום ומי המינימום.
נשווה את הגרדיאנט ל-0:

$$f_x = 2x - y - 2 = 0$$

$$f_y = 2y - x - 2 = 0$$

ונקבל נקודה חשודה - $(2,2)$.
כעת, נתבונן בצלעות המשולש. בצלע $y = 0$, נחקור את הפונקציה:

$$f(x,0) = x^2 - 2x$$

נגזור ונשווה ל-0, ונקבל $x = 1$, כלומר הנקודה היא $(1,0)$.
באופן דומה, על הצלע $x = 0$, נקבל כנקודה חשודה את הנקודה $(0,1)$.
משוואתה של הצלע השלישית היא $y = 6 - x$, ולכן נחקור את הפונקציה:

$$f(x, 6-x) = x^2 + (6-x)^2 - x(6-x) - 2x - 2(6-x)$$

כלומר:

$$f(x, 6-x) = 3x^2 - 18x + 24$$

נגזור ונשווה ל-0, ונקבל $x = 3$, כלומר הנקודה $(3,3)$ חשודה.
כמו כן, אמרנו ששלושת הקודקודים הם נקודות חשודות.
נבדוק מה ערך הפונקציה בכל אחת מהנקודות החשודות שלנו:

$$f(0,6) = f(6,0) = 24$$

$$f(0,0) = 0$$

$$f(2,2) = -4$$

$$f(1,0) = f(0,1) = -1$$

$$f(3,3) = -3$$

ולכן $(0,6),(6,0)$ הן נקודות מקסימום גלובאלי והנקודה $(2,2)$ היא נקודת מינימום גלובאלי.

הגדרה:

תהי $F(x,y)$ מוגדרת בתחום D ויהי $\Delta=[a,b]\times[c,d]$ מלבן ב־D.

נאמר שהמשוואה $F(x,y)=0$ מגדירה את y כפונקציה סתומה של x במלבן Δ, אם לכל $a\le x\le b$ יש y יחיד בקטע $[c,d]$ כך ש:

$$F(x,y)=0$$

הקדמה:

נתונה המשוואה $y+\frac{1}{2}siny-x=0$. האם משוואה זו מגדירה את y פונקציה של x?

נבודד דווקא את x כפונקציה של y:

$$x=y+\frac{1}{2}siny$$

זו פונקציה גזירה לכל y ומתקיים:

$$x'=1+\frac{1}{2}cosy>0$$

והנגזרת עולה לכל y. כלומר, זו פונקציה הפיכה, ולכן יש לה פונקציה הפוכה שמגדירה את y כפונקציה של x.

משפט הפונקציה הסתומה ־ משוואה אחת ונעלם אחד:

נתונה המשוואה $F(x,y)=0$ כאשר F מוגדרת בסביבה D של הנקודה (x_0,y_0).

אם $F(x,y),F_x(x,y),F_y(x,y)$ רציפות ב־D ואם $F(x_0,y_0)=0$, $F_y(x_0,y_0)\neq 0$, אז קיים מלבן:

$$\Delta=\{(x,y)|\,|x-x_0|<\delta,|y-y_0|<\epsilon\}$$

כך שהמשוואה הנ"ל מגדירה את y כפונקציה סתומה של x ונסמן $y=f(x)$.

כמו כן, $y_0=f(x_0)$ ולכל x במלבן $F_y(x,f(x))\neq 0$ והפונקציה $y=f(x)$ גזירה ברציפות, ומתקיים:

$$\frac{df}{dx}(x)=-\frac{F_x(x,f(x))}{F_y(x,f(x))}$$

תרגיל:

נתונה המשוואה $x^y-y^x-y=0$. האם המשוואה מגדירה את y כפונקציה של x בסביבת הנקודה $(2,1)$?

אם כן, חשבו את $y'(2)$.

<u>פתרון:</u>

נגדיר $F(x,y) = x^y - y^x - y$.

F רציפה בסביבת הנקודה, הנגזרות הן:

$$F_x = yx^{y-1}y^x lny$$

$$F_y = x^y lnx - xy^{x-1} - 1$$

רציפות, ובנוסף:

$$F_y(2,1) = 2ln2 - 3 \neq 0$$

לכן תנאי משפט הפונקציה הסתומה מתקיימים, ולכן y מוגדרת כפונקציה של x בסביבות הנקודה $(2,1)$.

כעת, לפי המשפט:

$$y'(2) = -\frac{F_x(2,1)}{F_y(2,1)} = \frac{1}{3 - ln4}$$

<u>תרגיל:</u>

נתונה המשוואה:

$$x^2 + y^2 = 25$$

כמה פונקציות $y = y(x)$ מגדירה המשוואה בקטע $-5 \leq x \leq 5$? כמה מהן רציפות?

<u>פתרון:</u>

לכל נקודה בקטע אפשר להתאים אחד מהערכים $\pm\sqrt{25 - x^2}$. כלומר, מדובר על כל הפונקציות:

$$y : [-5,5] \to \{\pm\sqrt{25 - x^2}\}$$

ולכן יש $2^{\aleph}$ כאלה.

פונקציות רציפות יש שתיים בלבד:

$$y(x) = \sqrt{25 - x^2}$$

$$y(x) = -\sqrt{25 - x^2}$$

חשבו למה כל קומבינציה אחרת של $\pm\sqrt{25 - x^2}$ אינה רציפה.