

בוחן**אלגברה לינארית 2 למדעי המחשב**

ענו על כל השאלות:

שאלה 1

א. נתונה הדטרמיננטה: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ m & n & l \end{vmatrix} = 2$. מצאו למה שווה הדטרמיננטה:

$$\begin{vmatrix} l-4c & f & 2l+f \\ m-4a & d & 2m+d \\ n-4b & e & 2n+e \end{vmatrix} = ?$$

ב. הוכיחו או הפריכו: אם A היא מטריצה שאיבריה מספרים שלמים וגם האיברים של

$$A^{-1} \text{ הם שלמים, אז } |A|^{2000} = 1.$$

שאלה 2

יהיו U ו- V מ"ו מעל שדה F . נתונות העתקות לינאריות: $S:U \rightarrow V$ ו- $T:V \rightarrow U$ ונתון שהרכבה $ST:U \rightarrow U$ היא העתקת הזהות (בפרט חח"ע ועל). הוכיחו ש $\dim V \geq \dim U$.

שאלה 3

יהיו $A, B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ מטריצות שונות ($A \neq B$) המקיימות:

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

נגדיר העתקה לינארית $T: \mathbb{R}^{3 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$, $T = T_{A-B}$ (משמע: $(T(v)) = (A-B)v$)

א. מהו $\dim(\ker T)$?

ב. מהו $\dim(\text{Im} T)$?

ג. נניח ש A מקיימת בנוסף ש- $A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. נגדיר $T: \mathbb{R}^{3 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ע"י:

$T(v) = Av$. בהינתן ש S הינו הבסיס הסטנדרטי, מצאו את $[T]_S^S$ ואת T במפורש.

בהצלחה!