אינפי II תיכוניסטיים - תרגול IX

סדרות וטורים של פונקציות

הגדרה

* סדרה $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ של פו' היא התאמה שבה לכל n נצמיד מתאימה פו' $f_n(x)$.
לכל x_0 השייך לתחום ההגדרה של $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ נקבל סדרת מספרים $\{f_n(x_0)\}_{n\in\mathbb{N}}$.
* אם $\{f_n(x_0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ מתכנסת נאמר שסדרת הפו' $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ מתכנסת נקודתית ב-x_0.
* אם $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ מתכנסת נקודתית לכל $x_0\in I$, אזי נאמר ש-$\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ מתכנסת נק' ב-I.

הגדרה

בהינתן סדרת פו' $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$, פו' הגבול (אם קיימת) היא $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$

דוגמאות

I. $f_n(x)=x^n$ בתחום $(-1,1]$ מתכנסת נק' ל- $f(x)=\begin{cases}0 & ,-1<x<1\\ 1 & ,x=1\end{cases}$

נחלק למקרים:

$x=1$: $f_n(x)=f_n(1)=1^n=1\xrightarrow[n\to\infty]{}1$

$x\in(-1,1)$: $f_n(x)=x^n\xrightarrow[n\to\infty]{}0$

II. $f_n(x)=\frac{1}{nx}$ בתחום $(0,\infty)$ מתכנסת נק' ל- $f(x)=0$

III. $f_n(x)=\frac{1}{n}\sin(nx)$ בכל $\mathbb{R}$ מתכנסת נק' ל- $f(x)=0$

IV. $f_n(x)=\left(1+\frac{1}{n}\right)x^2$ בכל $\mathbb{R}$ מתכנסת נק' ל- $f(x)=x^2$

הגדרה (בניסוח $\varepsilon-\delta$)

תהי $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$. נאמר ש-$f_n(x)$ מתכנסת נק' ל-$f(x)$ ב-D אם:

$$\forall x_0\in D\ \forall\varepsilon>0:\ \exists N_{x_0,\varepsilon}\in\mathbb{N}:\forall n>N_{x_0,\varepsilon}:\ |f_n(x_0)-f(x_0)|<\varepsilon$$

__תרגיל__

הוכיחו לפי הגדרה ε-δ ש- $f_n(x)=\frac{1}{nx}$ מתכנסת נק' ל- $f(x)=0$ ב- $(0,\infty)$

יהי $x_0\in(0,\infty)$, $\varepsilon>0$. נמצא $N_{x_0,\varepsilon}$ כך ש-

$$\forall n>N_{x_0,\varepsilon}: \quad |f_n(x_0)-f(x_0)|<\varepsilon$$

$$\left|\frac{1}{nx_0}-0\right|=\frac{1}{nx_0}<\varepsilon$$

$\Updownarrow$ נדרוש

$$n>\frac{1}{\varepsilon x_0}$$

אז נבחר $N_{x_0,\varepsilon}=\left\lceil\frac{1}{\varepsilon x_0}+1\right\rceil$ ונקבל את הדרוש $\square$

__תרגיל__

הוכיחו כי $f_n(x)=(1+\frac{1}{n})x^2$ מתכנסת נק' ל- $f(x)=x^2$ על $\mathbb{R}$

יהי $x_0\in\mathbb{R}$, $\varepsilon>0$. נמצא $N_{x_0,\varepsilon}\in\mathbb{N}$ כך ש-

$$\forall n>N_{x_0,\varepsilon}: \quad |f_n(x_0)-f(x_0)|<\varepsilon$$

$$\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)x_0^2-x_0^2\right|<\varepsilon$$

$$\frac{1}{n}x_0^2=\left|\frac{1}{n}x_0^2\right|<\varepsilon \implies n>\frac{x_0^2}{\varepsilon}$$

אז נבחר $N_{x_0,\varepsilon}=\left\lceil\frac{x_0^2}{\varepsilon}+1\right\rceil$ ונקבל את הדרוש $\square$

__הערה__

שימו לב: לקחנו במקרים N שתלוי ב-x_0 וב-ε: לכל x_0 שבחרנו צריכים למצוא $N_{x_0,\varepsilon}$ אחר. במקרה ו-$N_{x_0,\varepsilon}$ אינו תלוי ב-x_0 אלא רק ב-ε, נאמר כי הסדרה מתכנסת במידה שווה

__הגדרה__ (בניסוח ε-δ)

נאמר ש-$\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ מתכנסת במידה שווה (במ"ש) ל-$f(x)$ ב-D אם

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N_\varepsilon\in\mathbb{N}: \forall n>N_\varepsilon: \forall x_0\in D: |f_n(x_0)-f(x_0)|<\varepsilon$$

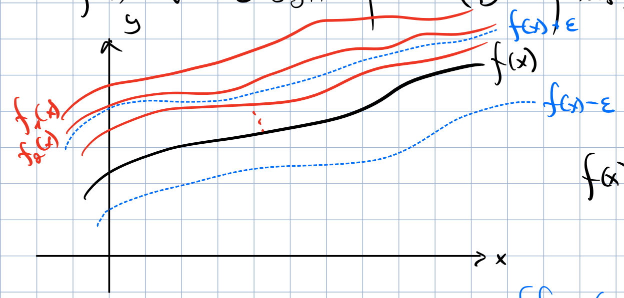
הערה

התכנסות במ"ש גוררת התכנסות נקודתית, ולא להפך.

הסבר גרפי: נניח $f(x)$ פונקציה ו- $\{f_n(x)\}$ ב- D.

"פס ε" המרווח בין $f(x)-\varepsilon$ ל- $f(x)+\varepsilon$.

הסדרה $\{f_n(x)\}$ מתכנסת במ"ש ב- D ל- f אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $n_0\in\mathbb{N}$ כך שהחל ממנו כל $f_n(x)$ תהיה מוכלת כולה (לאורך D) בתוך הפס ε של $f(x)$.



דוגמא

$f_n(x)=(1+\frac{1}{n})x^2$ מתכנסת במ"ש ל- $f(x)=x^2$ ב- $[-1,1]$

הוכחנו קודם כבר שמתכנסת ב- $x_0\in\mathbb{R}$, בפרט לכל $x_0\in[-1,1]$ מתקיים:

$$\forall n > N_{x_0,\varepsilon}=\left\lceil \frac{x_0^2}{\varepsilon}+1\right\rceil : \quad |f_n(x_0)-f(x_0)| < \varepsilon$$

כיוון ש- $x_0\in[-1,1]$ מתקיים כי $x_0^2\le 1$ ולכן ניתן לבחור $N_{x_0,\varepsilon}$ שאינו תלוי ב- x_0, ולכן $N_\varepsilon=\lceil \frac{1}{\varepsilon}+1\rceil$ מקיים הדרוש. □

תרגיל

הנו הוכיחו לסדרה הנ"ל מתכנסת נק' אך לא במידה שווה

נוכיח את הטענה לגבי הקטע $(1,\infty)$:

נראה שקיים $\varepsilon>0$ עבורו לכל $n\in\mathbb{N}$ קיימים $x_0\in(1,\infty)$ ו- $n>N$ כך ש-

$$|f_n(x_0)-f(x_0)|\ge\varepsilon$$

נבחר $\varepsilon=1$ ויהי $N\in\mathbb{N}$. נבחר x_0, $n>N$ כנדרש:

נרצה $x_0, n>N$ כך ש- $|f_n(x_0)-f(x_0)|=|(1+\frac{1}{n})x_0^2-x_0^2|=\frac{1}{n}x_0^2\ge 1$

$$x_0^2 \ge n > N$$

אז נבחר $x_0=\sqrt{N^2+1}$, $n=N+1$ ולכן

$$x_0^2=N^2+1\ge N+1>N$$

ולכן הסדרה אינה מתכנסת במ"ש □

מסקנה (משפט ה- lim-sup)

$f_n(x)$ מתכנסת במ"ש ל- $f(x)$ ב- D אמ"מ הסדרה $\varepsilon_n := \sup_{x\in D}|f_n(x)-f(x)|$ מתכנסת ל- 0

בדוגמא שראינו הוכחנו במשפט ה- lim-sup שמוכיח קודם ולכן:

$$\sup_{x\in(1,\infty)}\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)x_0^2-x_0^2\right| = \sup_{x\in(1,\infty)}\left|\frac{1}{n}x_0^2\right| = \infty \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

ולכן אין מתכנס במ"ש

תרגיל (מבחן 2017)

תהי סדרת פונ' $f_n(x)=n^2xe^{-n^2x^2}$ בקטע $[0,\infty)$

א. מצאו את התחום D בו סדרת הפונ' מתכנסת ואת הפונ' f אליה הסדרה מתכנסת

ב. האם ההתכנסות בתחום D הינה במ"ש?

א. יהי $x_0\neq 0$. נחשב את הגבול

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = \lim_{n\to\infty} n^2x_0e^{-n^2x_0^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2x_0}{e^{n^2x_0^2}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{לופ'}}{=}} \lim_{n\to\infty}\frac{2nx_0}{2nx_0^2e^{n^2x_0^2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_0e^{n^2x_0^2}} = 0$$

עבור $x_0=0$ מתקיים כבר $\forall n, f_n(x_0)=0$ ולכן

$$\lim_{n\to\infty} f_n(0)=0$$

לכן $\{f_n(x)\}$ מתכנסת נק' בכל $[0,\infty)$ ל- $f(x)=0$

ב. יהי $x_0\in[0,\infty)$. ראינו כי $\lim_{n\to\infty} f_n(x_0)=0$. נשתמש במשפט ה- lim-sup:

$$\varepsilon_n = \sup_{x\in[0,\infty)}|f_n(x)-f(x)| = \sup_{x\in[0,\infty)}|n^2xe^{-n^2x^2}|$$

כיוון שהפונ' הנ"ל גזירה, נמצא את נק' ע"י גזירה:

$$0 = f_n'(x) = n^2e^{-n^2x^2} - 2n^4x^2e^{-n^2x^2} = \underbrace{n^2e^{-n^2x^2}}_{>0}(1-2n^2x^2)$$

$$\Downarrow$$

$$2n^2x^2=1$$

$$x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}n} \Big/ x\in[0,\infty)$$

$$\Downarrow$$

$$x=\frac{1}{\sqrt{2}n}$$

אפשר לראות כי הנגזרת מינוס יורדת בתחום $[0,\infty)$ ולכן עבור' שלכן לך מקס

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_n = \sup_{x\in[0,\infty)} \left|n^2 x e^{-n^2x^2}\right| = n^2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}n}e^{-\frac{1}{2}} = \frac{n}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty \neq 0$$

ולכן הסדרה אינה מתכנסת במ"ש ב- $[0,\infty)$

$\square$

תרגיל (מועד ו 2010)

א. תהיינה f_n, g_n שתי סדרות פו' המוגדרות בקטע I ומתכנסות בו במ"ש.

נניח כי שתי הסדרות הללו חסומות במשותף ע"י אותו קבוע M, כלומר

$$\forall n,x: \ |f_n(x)|, |g_n(x)| < M$$

הוכיחו כי $f_n\cdot g_n$ מתכנסת במ"ש

ב. הוכיחו כי $f_n(x)=x,\ g_n(x)=\frac{1}{n}$ מתכנסות במ"ש בקטע $[0,\infty)$ אך שהסדרה $f_n\cdot g_n$ אינה מתכנסת שם (מדוע אין סתירה לסעיף א?)

א. נשתמש במבחן ה- lim-sup:

$$\varepsilon_n = \sup_{x\in I}|f_n(x)g_n(x) - f(x)\cdot g(x)| = \sup_{x\in I}|f_n(x)\cdot g_n(x) - f_n(x)g(x) + f_n(x)g(x) - f(x)g(x)| =$$

$$= \sup_{x\in I}|f_n(x)(g_n(x)-g(x)) + g(x)(f_n(x)-f(x))| \underset{\text{אי"ש המשולש}}{\leq}$$

$$\sup_{x\in I}|f_n(x)(g_n(x)-g(x))| + \sup_{x\in I}|g(x)(f_n(x)-f(x))| = \sup_{x\in I} f_n(x)\cdot\sup_{x\in I}|g_n(x)-g(x)| +$$

$$+\sup_{x\in I} g(x)\sup_{x\in I}|f_n(x)-f(x)| \underset{\text{חסומות ע"י } M \ f_n,g_n}{\leq} M\sup_{x\in I}|g_n(x)-g(x)| + M\sup_{x\in I}|f_n(x)-f(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

כיוון ש- f_n, g_n מתכנסות
מ"ש ולפי מבחן ה- lim-sup מתכ"מ אליה

ב.

$$\underline{f_n}: \ \varepsilon_n = \sup_{x\in[0,\infty)}|x-x| = 0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\underline{g_n}: \ \varepsilon_n = \sup_{x\in[0,\infty)}\left|\frac{1}{n}-0\right| = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

אולם $f_n(x)g_n(x)$ לא מתכנסת במ"ש ל- 0 (לא"ה יש התכנסות נק')

$$\varepsilon_n = \sup_{x\in[0,\infty)}\left|\frac{x}{n}-0\right| = \infty \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty \neq 0$$

אין סתירה לסעיף הקודם כי $f_n(x)$ אינה חסומה ב- $[0,\infty)$

<u>משפט</u> (תנאי התכנסות נוסף)

אם $f_n(x)$ סדרת פונ' רציפות המתכנסת במ"ש ל- $f(x)$ אזי גם $f(x)$ רציפה.

כלומר אם $f(x)$ אינה רציפה אזי $f_n(x)$ אינה מתכנסת במ"ש ל- $f(x)$.

<u>דוגמא:</u> $f_n = x^n$ ב- $[0,1]$ אינה מתכנסת במ"ש ל- $f(x)=\begin{cases}0 & -1<x<1\\ 1 & x=1\end{cases}$

כי f אינה רציפה.

<u>תרגיל</u>

תנו דוגמא לסדרת $\{f_n(x)\}$ רציפות המתכנסת נק' אך לא במ"ש ל- $f(x)$, כך ש- $f(x)$ גם רציפה.

ראינו בתרגיל קודם כי $f_n(x)=\frac{x}{n}$ מתכנסת נק' ל- $f(x)=0$ (שהיא רציפה) אבל אינה מתכנסת במ"ש

<u>תרגיל</u>

הוכיחו/הפריכו:

$\{f_n(x)\}$ מתכנסת במ"ש ב- I $\Leftarrow$ הפונ' הגבולית $f(x)$ חסומה ב- I

<u>הפרכה:</u> $f_n(x)=\frac{1}{x}$ ב- $I=(0,1)$ מתכנסת במ"ש ל- $f(x)=\frac{1}{x}$ (כי הגבול סדרת פונ' קבועה) אבל $f(x)$ אינה חסומה ב- $(0,1)$

<u>משפט</u> (דיני)

אם $f_n(x)$ סדרת פונ' מונוטונית יורדת, כלומר $\forall n,x: f_{n+1}(x)\le f_n(x)$, המוגדרות בקטע <u>סגור</u> I, רציפות המתכנסות נק' ל- f ב- I. אזי ההתכנסות היא במ"ש

(המשפט נכון גם עבור סדרת פונ' מונו' עולה)

<u>תרגיל</u>

בדקו התכנסות ש הסדרה $f_n(x)=\sqrt[n]{\sin(x)}$ ב- $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$

נשים לב כי לכל $x_0\in[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}]$ מתקיים

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sin x_0}=1$$

אזי אם ישנה התכנסות במ"ש היא ל- $f(x)=1$ שהיא כן רציפה (כלומר יש התכנסות נק').

בנוסף מתקיים

(i) $\forall x\in[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}],\ n\in\mathbb{N}:\ f_{n+1}(x)=\sqrt[n+1]{\sin x}\geq\sqrt[n]{\sin x}$

$\forall x\in[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}]:\quad 0\leq\sin x\leq 1$

(ii) הנ"ל $f(x)=1$, $f_n(x)=\sqrt[n]{\sin x}$ רציפות

ולכן ממשפט דיני ההתכנסות היא במ"ש

טורי פונקציות

תזכורת

* תהי $\{f_n(x)\}$ סדרת פונ' המוגדרת בקטע I. הטור $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ נקרא טור פונקציות.
* בכל נק' $x_0\in I$ הטור $\sum_{n=1}^{\infty}f_a(x_0)$ הינו טור מספרים. נסמן ב- סדרת הסכומים החלקיים כ- $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}f_k(x)$ אשר פונ' הסכום (אם קיים)

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)$$

אזי:

הטור מתכנס נקודתית $\Longleftrightarrow$ $\{S_n(x)\}$ מתכנסת נקודתית

הטור מתכנס במ"ש ב- I $\Longleftrightarrow$ $\{S_n(x)\}$ מתכנסת במ"ש ב- I

תרגיל

קבע את התכנסות של הטור $\sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1}$ ב- $(-1,1)$

נחשב את סדרת הסכומים החלקיים (סס"ח):

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n} x^{k-1} = 1+x+x^2+\dots+x^{n-1} \underset{\text{סכום ס' הנדסית}}{=} \frac{1-x^n}{1-x}$$

$$\Rightarrow \forall x\in(-1,1):\ S(x)=\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{1-x^n}{1-x} \underset{x\in(-1,1)}{=} \frac{1}{1-x}$$

מוגדרת בקטע הזה
שכן q

לגבי התכנסות במ"ש:

$$\sup_{x\in(-1,1)} |S_n(x)-S(x)| = \sup_{x\in(-1,1)}\left|\frac{1-x^n}{1-x}-\frac{1}{1-x}\right| = \sup_{x\in(-1,1)}\left|\frac{x^n}{1-x}\right| = \infty \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty \neq 0$$

לכן הטור לא מתכנס במ"ש ב- $(-1,1)$ (כן מתכנס במ"ש בכל קטע המוכל ממש ב- $(-1,1)$)

הערה

התכנסות במ"ש של $\{f_k(x)\}$ ב- I אינה גוררת התכנסות של הטור $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$

<u>דוגמה:</u> $f_k(x)=\frac{x}{k}$ מתכנסת במ"ש בכל קטע סופי (a,b) שכן כפי הראינו בה"ת $f(x)=0$ וכן עבור ה- lim-sup מתקיים:

$$\varepsilon_n = \sup_{x\in(a,b)} |f_n(x)-f(x)| = \sup_{x\in(a,b)}\left|\frac{x}{n}\right| = \frac{b}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

אבל $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x}{k} = x\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ מתבדר לכל $x\neq 0$.