

**התפלגויות**

**(1) התפלגות אחידה**

קובייה הוגנת עם  $n$  מצבים,  $X \sim U[1, n]$   
 $P(X = i) = \frac{1}{n}$  לכל  $i = 1, \dots, n$

$$E(X) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} i = \frac{n+1}{2}$$

$$V(X) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} i^2 - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)(n+2)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4}$$

$$= \frac{n+1}{12} [4n+2 - 3n-3] = \frac{n^2-1}{12}$$

נוסחה:

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

$$X \sim E(X) \pm_{-3 \leq c \leq 3} \sqrt{V(X)}$$

**(2) ברנולי (הרצאה 9)**

**(3) בינומית (בהמשך להרצאה 9)**

$X \sim Bin(n, p)$  כאשר  $X$  סופר הצלחות בסדרה של  $n$  ניסויי ברנולי בלתי תלויים.

חישובו ש-  $E(X) = np$ , נותר לחשב את השונות.

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$E(X^2) = E(X(X-1)) + E(X)$$

$$E(X(X-1)) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k} \cdot k(k-1) = \sum_{k=2}^n \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} p^k q^{n-k} \cdot k(k-1)$$

$$= \sum_{k=2}^n \frac{n(n-1)(n-2)!}{(k-2)! \cdot (n-k)!} p^{k-2} \cdot p^2 \cdot q^{n-k} = \sum_{\substack{k=j+2 \\ j=k-2}}^{n-2} \dots$$

$$= \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} p^j q^{(n-2)-j} \cdot n(n-1)p^2$$

$$E(X^2) = n(n-1)p^2 + np$$

$$V(X) = npq$$

גישה אחרת:

אפשר להגדיר את  $X$  על ידי  $X = X_1 + \dots + X_n$  כאשר  $X_i \sim b(p)$  בלתי תלויים.

לכן:

$$E(X) = \sum E(X_i) = \sum_{i=1}^n p = np$$

כמו כן:

$$V(X) = V(\sum X_i) = \sum_i V(X_i) + \underbrace{\sum_{i \neq j} Cov(X_i, X_j)}_{\text{המשתנים בלתי מתואמים בזוגות}} = \sum V(X_i) = npq$$

**דוגמה**

שחקן משחק  $n$  מטעות הוגנים (בלתי תלויים).  
את אלו שנפלו על 1 זורקים שוב.  
הזכייה שווה למספר המטבעות שנפלו על אחד בפעם השנייה  $= X$ .

פתרון 1: נסמן ב-  $Y$  את מספר המטבעות שנפלו על 1 בסיבוב הראשון.

$$Y \sim \text{Bin}\left(n, \frac{1}{2}\right)$$

$$X \sim \text{Bin}\left(Y, \frac{1}{2}\right)$$

(התפלגות של  $X$  בהינתן  $Y$ )

$$E(X) = E(X|Y) = E\left(\frac{1}{2}Y\right) = \frac{1}{2}E(Y) = \frac{1}{4}n$$

$$V(X) = V(E(X|Y)) + E(V(X|Y)) = V\left(\frac{1}{2}Y\right) + E\left(\frac{Y}{4}\right) = \frac{1}{4}V(Y) + \frac{1}{4}E(Y) = \frac{3}{16}n$$

פתרון 2:

$$X \sim \text{Bin}\left(n, \frac{1}{4}\right)$$

הסבר מפורט:

$$Y = Y_1 + \dots + Y_n, Y_i \sim b\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$X = Y_1 Z_1 + \dots + Y_n Z_n, Z_i \sim b\left(\frac{1}{2}\right)$$

**(4) התפלגות פואסון**

ניח ש-  $X \sim \text{Bin}(n, p)$  כאשר  $p = \lambda_{\text{קבוע}}$  ו-  $np = \lambda$

מה קורה כאשר  $n \rightarrow \infty$ .

$\Delta t$

$$X \sim \text{Bin}\left(\frac{t}{\Delta t}, \lambda \cdot \Delta t\right)$$

$$P(X = k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (n-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} =$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \frac{n!}{(n-k)! \cdot n^k} \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \rightarrow \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!}$$

$$1 \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)}_{\rightarrow 1}$$

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!} \text{ אם } X \sim \text{Poi}(\lambda)$$

נבדוק שזהו אכן התפלגות:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1$$

איפה פוגשים התפלגות כזו : אם ניקח  $X \sim Bin(n, p)$ , גדול  $n$ , קטן  $p$ ,  $np$  נתון.  
בקירוב  $X \sim Poi(np)$   
"חישוב" (אינטואיטיבי) התוחלת והשונות :

$$X \sim Bin(n, p) \Rightarrow E(X) = np = \lambda \Rightarrow V(X) = npq = \lambda \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right) \rightarrow \lambda$$

חישוב (פורמלי) תוחלת והשונות :

$$X \sim Poi(\lambda)$$

$$E(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^n}{n!} \cdot n = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \lambda = \lambda$$

$$E(X(X-1)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^n}{n!} \cdot n(n-1) = \sum_{n=2}^{\infty} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^{n-2} \lambda^2}{(n-2)!} = \lambda^2$$

$$\Rightarrow V(X) = E(X(X-1)) + E(X) - E(X)^2 = \lambda$$

דוגמה :

מספר הלקוחות הנכנסים למסעדה בשעה  $14^{59} - 14^{00}$  ביום 3.6.2017 מתפלג  $X \sim Poi(\lambda)$

לקוח מזמין דג בהסתברות  $p$ . השאלה היא מה התפלגות מספר הלקוחות שיזמינו דג. (נסמן ב-  $Y$ )

$$X \sim Poi(\lambda)$$

$$Y|X \sim Bin(X, p)$$

נחשב את ההתפלגות של  $Y$ .

$$\begin{aligned} P(Y = n) &= \sum_{k=0}^{\infty} P(Y = n|X = k) \cdot P(X = k) = \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k}{n} p^n \cdot q^{k-n} \cdot \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda} \cdot p^n \cdot \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{n! (k-n)!} q^{k-n} \cdot \lambda^k = \frac{e^{-\lambda} (p\lambda)^n}{n!} \cdot \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(q\lambda)^{k-n}}{(k-n)!} = \\ &= \frac{e^{-\lambda} (p\lambda)^n e^{q\lambda}}{n!} = \frac{e^{-p\lambda} (p\lambda)^n}{n!} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow Y \sim Poi(p\lambda)$$

**תרגיל**

$$X \sim Bin(n, p)$$

$$Y \sim Bin(m, p)$$

$$X + Y \sim Bin(m + n, p) \Leftarrow X, Y \text{ בלתי תלויים.}$$

תרגיל נוסף :

$$X + Y \sim Poi(\lambda + \mu) \Leftarrow X \sim Poi(\lambda), Y \sim Poi(\mu)$$

רמז : לפתח את הביטוי -

$$P(X + Y = n) = \sum \dots$$