פתרון תרגיל 1 אנליזה הרמונית תשע"ט

5 בנובמבר 2018

1. נבדוק אם התכונות הדרושות מתקיימות.

(א) זו אינה מכפלה פנימית כי תכונת האי־שליליות לא מתקיימת. למשל, עבור המטריצה:

$$A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

נקבל:

$$\langle A,A\rangle=tr\left(A^2\right)=tr\left(\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right)=tr\left(\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\right)=-2<0$$

(ב) זו כן מכפלה פנימית; הליניאריות נובעת מהליניאריות של העקבה:

$$\langle A+B,C\rangle=tr\left((A+B)\,C^t\right)=tr\left(AC^t+BC^t\right)=tr\left(AC^t\right)+tr\left(BC^t\right)=\left\langle A,C^t\right\rangle+\left\langle B,C^t\right\rangle$$

$$\langle\alpha A,B\rangle=tr\left(\alpha AB^t\right)=\alpha tr\left(AB^t\right)=\alpha\left\langle A,B^t\right\rangle$$

הסימטריות נובעת מהעובדה שלכל מטריצה C, $tr\left(C\right)=tr\left(C^t\right)$:

$$\left\langle A,B^t\right\rangle=tr\left(AB^t\right)=tr\left(\left(AB^t\right)^t\right)=tr\left(\left(B^t\right)^t A^t\right)=tr\left(BA^t\right)=\langle B,A\rangle$$

מה לגבי אי־שליליות? נזכור שהשורה ה־i של A היא העמודה ה־i של A^t, ולכן:

$$\langle A,A\rangle=tr\left(AA^t\right)=\left(AA^t\right)_{11}+\cdots+\left(AA^t\right)_{nn}$$

לפי הגדרת כפל מטריצות, האיבר $\left(AA^t\right)_{kk}$ הוא המכפלה של השורה ה־k של A והעמודה ה־k של A^t, שהן אותו הוקטור:

$$\left(AA^t\right)_{kk}=\left(a_{k1},a_{k2},\ldots,a_{kn}\right)^t\cdot\left(a_{k1},a_{k2},\ldots,a_{kn}\right)=a_{k1}^2+\cdots+a_{kn}^2$$

לכן $\langle A,A\rangle$ הוא סכום של מספרים אי־שליליים ולכן אי־שלילי. אם $A=0$ אז כל האיברים מתאפסים ולכן $\langle A,A\rangle=0$, ומצד שני אם $\langle A,A\rangle=0$ נקבל:

$$a_{11}^2+\cdots+a_{1n}^2+\cdots+a_{n1}^2+\cdots+a_{nn}^2=0$$

סכום של איברים אי־שליליים מתאפס – כל האיברים הם אפסים, ולכן גם $A=0$, מה שנותן לנו את תכונת האי־שליליות במלואה.

(ג) זו לא מכפלה פנימית, תכונת האי־שליליות לא מתקיימת; למשל עבור $f(x)=1$, נקבל:

$$\langle f,f\rangle=\int_0^1 f'(x)\,f'(x)\,dx=0$$

אף על פי ש: $f\neq 0$.

(ד) זו מכפלה פנימית; הליניאריות והסימטריות נובעות מתכונות האינטגרל (וכפל היא פעולה חילופית):

$$\langle f+g,h\rangle=\int_0^1 (f+g)\,e^x dx=\int_0^1 fe^x dx+\int_0^1 ge^x dx=\langle f,h\rangle+\langle g,h\rangle$$

$$\langle \alpha f,g\rangle=\int_0^1 \alpha fge^x dx=\alpha\int_0^1 fge^x dx=\alpha\,\langle f,g\rangle$$

$$\langle f,g\rangle=\int_0^1 fge^x dx=\int_0^1 gfe^x dx=\langle g,f\rangle$$

מה לגבי אי־שליליות? ראשית, לכל פונקציה f:

$$\langle f,f\rangle=\int_0^1 f^2e^x dx\geq 0$$

מכיוון שהפונקציה עצמה גם מקיימת: $f^2e^x\geq 0$ (זכרו מה מתאר אינטגרל – השטח שמתחת לגרף הפונקציה ומעל לציר). כמו כן, אם $f=0$ אז גם $\langle f,f\rangle=0$.

נותר להסביר למה אם $\langle f,f\rangle=0$ אז $f=0$. אפשר להראות את הטענה השקולה: אם $f\neq 0$ אז $\langle f,f\rangle\neq 0$.

אם $f\neq 0$, קיימת $x_0\in[0,1]$ עבורה: $f(x_0)\neq 0$ ולכן $f^2(x_0)>0$.

מכיוון שהפונקציה רציפה, קיים קטע פתוח L סביב x_0 שבו לכל x מתקיים:
$f^2(x)e^x \geq f^2(x) \geq \frac{1}{2}f^2(x_0)$, ואז:

$$\langle f,f\rangle = \int_0^1 f^2(x)e^x dx \geq \int_L f^2(x)e^x dx \geq \int_L \frac{1}{2}f^2(x_0)e^x dx = \frac{1}{2}f^2(x_0)\int_L e^x dx > 0$$

כנדרש.

2. נסמן:

$$x = (|x_1|, ..., |x_n|), y = (1, ..., 1)$$

ולפי א"ש קושי־שוורץ:

$$| < x, y > | \leq ||x|| \cdot ||y||$$

נקבל:

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i| = | < x, y > | \leq ||x|| \cdot ||y|| = \sqrt{n} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}$$

ואם נחלק ב־$\sqrt{n}$ נקבל את הדרוש.

3. נשתמש בתכונות המכפלה הפנימית ב־$\mathbb{R}$:

$$\frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2\right) = \frac{1}{4}\left(\langle u+v, u+v\rangle - \langle u-v, u-v\rangle\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\langle u, u+v\rangle + \langle v, u+v\rangle - \langle u, u-v\rangle - \langle -v, u-v\rangle\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\langle u, u+v\rangle + \langle v, u+v\rangle + \langle u, v-u\rangle + \langle v, u-v\rangle\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\langle u, u+v+v-u\rangle + \langle v, u+v+u-v\rangle\right) = \frac{1}{4}\left(\langle u, 2v\rangle + \langle v, 2u\rangle\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(2\langle u,v\rangle + 2\langle v,u\rangle\right) = \frac{1}{4}\left(2\langle u,v\rangle + 2\langle u,v\rangle\right) = \langle u,v\rangle$$

ב־$\mathbb{C}$, כל השוויונות למעט האחרון עדיין תקפים, ולכן:

$$\frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2\right) = \frac{1}{4}\left(2\langle u,v\rangle + 2\langle u,v\rangle\right) = \frac{1}{4}\left(2\langle u,v\rangle + 2\overline{\langle u,v\rangle}\right)$$

כמו כן:

$$\langle u,v\rangle = \frac{1}{4}\left(i\left\|u+iv\right\|^2 - i\left\|u-iv\right\|^2\right) = \frac{i}{4}\left(\left\|u+iv\right\|^2 - \left\|u-iv\right\|^2\right) =$$

$$= \frac{i}{2}\left(\langle u,iv\rangle + \overline{\langle u,iv\rangle}\right) = \frac{i}{2}\left(-i\langle u,v\rangle + i\overline{\langle u,v\rangle}\right) = \frac{1}{2}\left(\langle u,v\rangle - \overline{\langle u,v\rangle}\right)$$

ולכן:

$$\frac{1}{4}\left(\left\|u+v\right\|^2 - \left\|u-v\right\|^2 + i\left\|u+vi\right\|^2 - i\left\|u-vi\right\|^2\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(2\langle u,v\rangle + 2\overline{\langle u,v\rangle}\right) + \frac{1}{2}\left(\langle u,v\rangle - \overline{\langle u,v\rangle}\right) = \langle u,v\rangle$$

והוכחנו את הדרוש.