תרגיל 3 אנליזה הרמונית תשע"ט

5 בנובמבר 2018

להגשה בשבוע שמתחיל בי' כסלו 18.11, כל אחד בקבוצת התרגול שלו.

1. יהי V מרחב מכפלה פנימית ויהי $U \leq V$ תת־מרחב; יהי $\{\tilde{v}_1, \dots \tilde{v}_n\}$ בסיס אורתונורמלי של U. לכל $v \in V$, ההיטל האורתוגונאלי של v על U הוא:

$$\pi_U(v) = \sum_{k=1}^{n} \langle v, \tilde{v}_k \rangle \tilde{v}_k$$

הוכיחו שלכל $1 \leq j \leq n$ מתקיים:

$$\langle v - \pi_U(v), \tilde{v}_j \rangle = 0$$

כלומר, ההפרש בין הוקטור לבין ההיטל שלו מאונך לכל וקטור בבסיס של המרחב U (ולכן גם מאונך לכל וקטור במרחב U).

2. על המרחב $\mathbb{R}_2[x]$ נגדיר מכפלה פנימית באופן הבא:

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$$

מצאו בסיס אורתוגונלי למרחב – קחו בסיס כלשהו והפעילו גרם־שמידט.

3. יהי V מרחב מכפלה פנימית ויהי $U \leq V$ תת־מרחב; יהי $\{\tilde{v}_1, \dots \tilde{v}_n\}$ בסיס אורתונורמלי של U. לכל $v \in V$ אנו מסמנים את ההיטל האורתוגונאלי של v על U כך: $\pi_U(v)$. הוכיחו שלכל $v, w \in V$ מתקיים:

$$\langle \pi_U(v), w \rangle = \langle v, \pi_U(w) \rangle$$

4. במרחב $C[-1,1]$ עם המכפלה הפנימית:

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$$

מצאו את הקירוב הטוב ביותר לפונקציה $f(x) = e^x$ בתת־המרחב $U = span\{1, x, x^2\}$.