

גיאומטריה אנליטית ודיפרנציאלית תשע"ו - תרגיל 8

11 במאי 2016

בתרגילים הבאים אפשר להניח שהפרמטריזציה של העקומה הגיאודזית β היא טבעית, כלומר:

$$\|\beta'\|^2 = 1$$

מכיוון ש: $\|\beta'\|^2 = (\gamma')^t \cdot G \cdot (\gamma')$, נקבל מד"ר נוספת על הקו הגיאודזי γ :

$$1 = (\gamma')^t \cdot G \cdot (\gamma')$$

השתמשו בה במידת הצורך.

1. (שאלה ממבחן)

נתון ההיפרבולואיד $(\cosh v \cos \theta, \cosh v \sin \theta, \sinh v)$.

חשבו את התבנית היסודית הראשונה ואת מקדמי כריסטופל.

הוכיחו שהמעגל $x^2 + y^2 = 1$ במישור $z = 0$ הוא קו גיאודזי על פני ההיפרבולואיד.

הניחו שהעקומה הגיאודזית נתונה בפרמטריזציה טבעית.

2. מצאו את הקווים הגיאודזיים על המשטחים הבאים. אם זה לא נורא מאד, מצאו את העקומות הגיאודזיות.

(א) ספירה: $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

(ב) גליל: $x^2 + y^2 = r^2$.

(ג) חרוט עם הפרמטריזציה:

$$X(\theta, v) = (rv \cos \theta, rv \sin \theta, v)$$

(ד) משטח שהמטריקה שלו היא:

$$G = \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}$$

3. (שאלה ממבחן)

נתבונן במישור כאשר הוא מצויד בתבנית היסודית הראשונה:

$$(g_{ij}) = e^{x+y} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(א) חשבו את מקדמי כריסטופל.

(ב) האם הישר $y = x$ הוא עקומה גיאודזית?

(ג) האם הישר $y = 0$ הוא עקומה גיאודזית?

(ד) האם הישר $x = 1$ הוא עקומה גיאודזית?

4. (סעיף בשאלה ממבחן)

הוכיחו את הזהות הבאה: $\vec{n}_j = -g^{ik} L_{kj} r_i$.

5. (שאלה ממבחן)

מצאו את עקמומיות גאוס של המשטח:

$$r(t, \theta) = (2 \sin t \cos \theta, 2 \sin t \sin \theta, 2 \cos t)$$

בעזרת התבניות היסודיות.

מצאו גם את מקדמי כריסטופל והמשוואות הגיאודזיות (אין צורך לפתור אותן).

6. (שאלה ממבחן)

נתון המשטח הבא ב- \mathbb{R}^3 : $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = y^3\}$.

(א) מהי עקמומיות גאוס k של M ?

(ב) הוכיחו שהקו $L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | y = z = 0\}$ הוא עקומה גיאודזית של M .

7. חשבו את עקמומיות גאוס של גליל, של ספירה ושל אוכף $(z = x^2 - y^2)$.