פונקציות:

יחס $f \subseteq A \times B$ נקרא פונקציה, אם הוא מקיים את התכונה הבאה: לכל $a \in A$ קיים $b \in B$ יחיד, כך ש: $(a,b) \in f$; כלומר, לכל איבר בקבוצה השמאלית יש איבר אחד בדיוק בקבוצה הימנית שנמצא איתו ביחד בזוג.

למשל: $A = \{1,2,3\}, B = \{1,2,3,4\}$. נתבונן ביחסים:

$$f_1 = \{(1,1),(1,2),(2,2),(3,4)\}$$

$$f_2 = \{(1,1),(2,1),(3,4)\}$$

$$f_3 = \{(1,1),(3,3)\}$$

$$f_4 = \{(1,1),(2,4),(3,3)\}$$

$f_1$ לא פונקציה, כי ל־$1 \in A$ יש יותר מ־$b$ יחיד שמתאים לו, גם $1 \in B$ מקיים: $(1,1) \in f_1$ וגם $2 \in B$ מקיים: $(1,2) \in f_1$.

$f_2$ פונקציה. $f_3$ לא פונקציה, כי ל־$2 \in A$ אין איבר מתאים מ־$B$. $f_4$ פונקציה.

לפונקציות יש סימונים ומינוחים מיוחדים. אם $f \subseteq A \times B$ היא פונקציה, נסמן $f : A \to B$. נאמר ש־$A$ היא התחום של $f$ ו־$B$ היא הטווח של $f$, ונסמן:

$$A = Dom(f), B = Ran(f)$$

כמו כן, אם $(a,b) \in f$, נסמן: $f(a) = b$, ונאמר ש־$a$ הוא המקור של $b$ ו־$b$ הוא התמונה של $a$.

בבית הספר ראינו פונקציות ממשיות (מ־$\mathbb{R}$ ל־$\mathbb{R}$), עם תחום הגדרה מעט קטן יותר מ־$\mathbb{R}$. למשל:

א. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$.

ב. $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x}$.

ג. $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x$.

אפשר, כמובן, להגדיר פונקציות הרבה יותר "מוזרות", עם טווח ותחום יותר "מסובכים", למשל: $f:P(\mathbb{N})\times P(\mathbb{N})\to\mathbb{Z}$ מוגדרת ע"י:

$$f(A,B)=\min(A\Delta B)$$

למשל:

$$f(\{1,2,3\},\mathbb{N}\setminus\{2\})=\min((\{1,2,3\})\Delta(\mathbb{N}\setminus\{2\}))=\min(\mathbb{N}\setminus\{1,3\})=2$$

זה נראה נחמד, אבל זו לא פונקציה; למשל, $f(A,A)=\min(A\Delta A)=\min\emptyset$ וזה לא מוגדר...אפשר לנסות "לתקן", למשל:

$$f(A,B)=\min((A\Delta B)\cup\{1\})$$

<u>הערות:</u>

1. כשאנחנו מגדירים פונקציה אנחנו צריכים לוודא שהיא "מוגדרת היטב" – אכן פונקציה, אכן מקיימת את התנאי (לכל איבר בתחום מתאים איבר יחיד בטווח). עצם זה שאנחנו רושמים "$f(a)=b$", עצם זה שאנחנו מגדירים את הפונקציה באמצעות כלל מסוים, לא אומר שזה פונקציה. בבית הספר הבעיה הזו לא צצה, כל עוד בדקנו מהו תחום ההגדרה, כל כלל מהצורה: "$f(x)=$"

הגדיר פונקציה. כאן, זה כבר לא בהכרח נכון.

ראשית, אנחנו צריכים לבדוק שלכל איבר בתחום יש איבר שמתאים לו בטווח. שנית, צריך לבדוק שלכל איבר מהתחום לא מתאים יותר מאיבר אחד מהטווח. מתי זה בדרך כלל יכול לקרות? כשאנחנו מגדירים פונקציה שהתחום שלה הוא קבוצת מנה – האיברים הם מחלקות שקילות. למשל, נתבונן ביחס השקילות הבא על השלמים:

$$(a,b) \in R \iff a \equiv b \pmod 3$$

קבוצת המנה היא: $A/R = \{[0]_R, [1]_R, [2]_R\}$. נגדיר "פונקציה" באופן הבא: $f : A/R \to \mathbb{Z}$ , $f([x]_R) = x$. כלומר:

$$f([0]_R) = 0, f([1]_R) = 1, f([2]_R) = 2$$

אך, מחלקת השקילות של 0 שווה למחלקת השקילות של 3, למשל – $[0]_R = [3]_R$. אך, לפי ההגדרה: $f([x]_R) = x$, היינו מקבלים:

$$0 = f([0]_R) = f([3]_R) = 3$$

וזה כמובן לא נכון; לכן, $f : A/R \to \mathbb{Z}, f([x]_R) = x$ איננה פונקציה.

נשים לב שאם מלכתחילה היינו רושמים: $f : A/R \to \mathbb{Z}$, $f([0]_R) = 0, f([1]_R) = 1, f([2]_R) = 2$, היינו מקבלים פונקציה.

במילים אחרות, כשאנחנו מגדירים פונקציה שהתחום שלה הוא קבוצת מנה, אנחנו צריכים לוודא שהיא מוגדרת היטב – לא תלויה בנציג של המחלקה. כלומר, אם $(x,y) \in R$ (ואז $[x]_R = [y]_R$) אז: $f([x]_R) = f([y]_R)$.

2. את קבוצת כל הפונקציות מ־$A$ ל־$B$, נסמן: $B^A$. כלומר: $B^A = \{f | f : A \to B\}$. עכשיו, אם יש לנו קבוצה של פונקציות, אפשר להגדיר

עליה פונקציות ולקבל פונקציות של פונקציות, למשל: $F:\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\to\mathbb{R}$, $F(f)=f(0)$. במילים: $F$ לוקחת פונקציה מ־$\mathbb{R}$ ל־$\mathbb{R}$ ומתאימה לה את הערך שלה ב־0. למשל, $f(x)=e^x$, אז: $F(f)=F(e^x)=e^0=1$.

3. נשים לב שאם התחום של $f:A\to B$ הוא קבוצה ריקה, לפי הגדרת פונקציה נקבל שגם: $f=\emptyset$. מצד שני, אם התחום לא ריק והטווח קבוצה ריקה, אין פונקציה ביניהן – אין פונקציה מקבוצה לא ריקה לקבוצה ריקה.

<u>שוויון בין פונקציות:</u>

תהיינה $A,B,C,D$ קבוצות ו־$f:A\to B, g:C\to D$ פונקציות. נאמר ש־$f=g$ אם ורק אם מתקיימים כל התנאים הבאים:

א. $A=C$ (אותו תחום).

ב. $B=D$ (אותו טווח).

ג. $f(x)=g(x)$ לכל $x$ בתחום.

למשל, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$; $g:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^2$ הן פונקציות שונות, כי התחום שלהן שונה.

מצד שני, $f:\{0,1\}\to\{0,1\}$, $f(x)=x$ ו־$g:\{0,1\}\to\{0,1\}$, $g(x)=x^3$, הן פונקציות שוות: $f=g$, כי יש להן את אותו תחום, אותו טווח ולכל $x$ בתחום מתקיים: $f(x)=g(x)$.

אי לכך, אפשר לחשוב על פונקציה $f:A\to B$ כעל שלשה סדורה: $(f,A,B)$.

<u>הערה:</u>

לא כל פונקציה אפשר או צריך לרשום באמצעות "כלל" אחד, מצורה: "$f(x)=$ ...". אפשר (בפרט בקבוצות סופיות) לומר מפורשות לאן הולך כל איבר.

למשל, $f:\{1,2,3,4,5\}\to\{1,2,4\}$, המוגדרת ע"י:

$$f(1)=f(3)=f(4)=2,f(2)=f(5)=1$$

כמו כן, כבר ראינו פונקציות "מפוצלות", כלומר שה"כלל" שמגדיר אותן הוא שונה בתחומים שונים, למשל:

$$f(x)=\begin{cases}1 & x<0\\ 3x & x\geq 0\end{cases}$$

<u>פונקציות חד־חד־ערכיות (חח"ע) ועל:</u>

תהיינה $A,B$ קבוצות ו־$f:A\to B$ פונקציה ביניהן. את ההגדרות הבאות אפשר להגדיר גם ליחסים באופן כללי, נתמקד בפונקציות.

1. נאמר ש־$f$ חח"ע, אם למקורות שונים יש תמונות שונות. כלומר:

$$\forall a_1,a_2\in A:a_1\neq a_2\to f(a_1)\neq f(a_2)$$

לחלופין, אפשר לומר ש־$f$ חח"ע, אם:

$$\forall a_1,a_2\in A:f(a_1)=f(a_2)\to a_1=a_2$$

כלומר, לתמונות שוות יש מקורות שווים. למשל, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin x$. $f$ לא חח"ע, למשל $\pi\neq 0$ אך: $f(0)=f(\pi)$. מצד שני $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=e^x$ היא חח"ע; אם $x_1\neq x_2$, $x_1<x_2$ מכיוון ש־$g$ עולה, נקבל שגם: $e^{x_1}<e^{x_2}$, ובפרט: $g(x_1)\neq g(x_2)$.

*אם פונקציה עולה/יורדת אז היא חח"ע; מצד שני, אם פונקציה היא חח"ע זה לא אומר שהיא עולה או יורדת. למשל:

$$f(x)=\begin{cases}e^x & x<0\\ 3+e^{-x} & x\geq 0\end{cases}$$

דוגמאות נוספות:

א. $f:\{1,2,3,4,5\}\to\{1,2,4\}$, המוגדרת ע"י:

$$f(1)=f(3)=f(4)=2, f(2)=f(5)=1$$

$f$ לא חח"ע, למשל $f(1)=f(3)$ למרות ש: $1\neq 3$.

ב. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י: $f(x)=x^2$. $f$ איננה חח"ע, למשל: $-1\neq 1$ אך: $f(1)=f(-1)$. לעומת זאת, $g:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ המוגדרת על ידי: $g(x)=x^2$, היא חח"ע; נוכיח זאת. יהיו $x_1,x_2\in[0,\infty)$ כך ש: $g(x_1)=g(x_2)$ ונוכיח ש: $x_1=x_2$. אם כן:

$$g(x_1)=g(x_2)\to x_1^2=x_2^2\to\sqrt{x_1^2}=\sqrt{x_2^2}\to|x_1|=|x_2|\to x_1=x_2$$

המעבר האחרון נבע מכך שהתחום הוא קבוצת המספרים האי־שליליים.

ג. אם ב־$A$ יש רק איבר אחד, כל פונקציה $f:A\to B$ היא תמיד חח"ע. למשל, $f:\{2\}\to\mathbb{N}$ המוגדרת ע"י: $f(2)=9345694364$.

ד. נגדיר פונקציה $F:\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\to P(\mathbb{R})$, $F(f)=\{f(0),f(1)\}$. $F$ לא חח"ע, למשל: $g(x)=x^2, f(x)=x^3$; $g\neq f$, אך:

$$F(g)=\{g(0),g(1)\}=\{0,1\}=\{f(0),f(1)\}=F(f)$$

2. נאמר ש־$fA\to B$ היא על, אם לכל איבר בטווח יש מקור בתחום, כלומר:

$$\forall b\in B\exists a\in A:f(a)=b$$

למשל, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=e^x$ לא על; למשל, ל־$-1$ אין מקור בתחום - לא קיים $x\in\mathbb{R}$ כך ש: $g(x)=-1$.

מצד שני, הפונקציה $h:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $h(x)=\ln x$ היא כן על; לכל $b\in\mathbb{R}$, בטוות, יש מקור בתחום, $e^b\in(0,\infty)$: $h\left(e^b\right)=\ln e^b=b$.

דוגמאות נוספות:

א. $f:\{1,2,3,4,5\}\to\{1,2,4\}$, המוגדרת ע"י:

$$f(1)=f(3)=f(4)=2, f(2)=f(5)=1$$

$f$ לא על, כי ל־$4\in\{1,2,4\}$ לא קיים $a\in\{1,2,3,4,5\}$ עבורו: $f(a)=4$.

לעומת זאת, הפונקציה: . $g:\{1,2,3,4,5\}\to\{1,2,4\}$, המוגדרת ע"י:

$$g(1)=g(3)=g(4)=2, g(2)=4, g(5)=1$$

היא כן על.

ב. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י: $f(x)=x^2$. $f$ לא על, למשל ל־$-1\in\mathbb{R}$ לא קיים $x\in\mathbb{R}$ עבורו: $f(x)=-1$. לעומת זאת, $g:\mathbb{R}\to[0,\infty)$ המוגדרת ע"י: $g(x)=x^2$ היא על, נוכיח זאת. יהי $b\in[0,\infty)$, צ"ל שקיים $a$ עבורו: $g(a)=b$. אם כן, אנחנו מחפשים $a$ עבורו: $a^2=b$, מכיוון ש־$b$ אי־שלילי, $a=\sqrt{b}\in\mathbb{R}$ מקיים את הדרוש (וגם $-\sqrt{b}$ סבבה).

ג. אם ב־$B$ יש איבר אחד והתחום לא ריק, כל פונקציה $f:A\to B$ היא על.

ד. ניתן דוגמאות (אם אפשר) לפונקציה $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ שהן:

1. לא חח"ע ולא על – $f(a,b)=a+b$. $f$ לא חח"ע, למשל $(2,1)\neq(1,2)$ אך: $f(1,2)=f(2,1)=3$. $f$ לא על, כי ל־$1\in\mathbb{N}$ אין מקור בתחום $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, כי לכל $(a,b)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ מתקיים: $f(a,b)=a+b\geq 2$ ובפרט: $f(a,b)\neq 1$.

2. לא חח"ע ועל – $f(a,b)=ab$. $f$ לא חח"ע, למשל $(2,1)\neq(1,2)$ אך: $f(1,2)=f(2,1)=2$ . $f$ על, לכל $a\in\mathbb{N}$ הזוג $(a,1)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ מקיים:

$.f(a,1)=a\cdot 1=a$

3. חח"ע ולא על – $.f(a,b)=(2a)^b$ $f(1,2)=(2\cdot 1)^2=4, f(2,1)=(2\cdot 2)^1=4$ מקורות שונים עם אותה תמונה, זו לא דוגמה טובה... ניסיון נוסף: $.f(a,b)=(a+1)^b$ $f(1,2)=(1+1)^2=4, f(3,1)=(3+1)^1=4$ מקורות שונים עם אותה תמונה, זו לא דוגמה טובה...

דוגמה טובה: $.f(a,b)=2^a3^b$ $f$ לא על, כי $f(a,b)\geq 6$ ובפרט לא קיים $(a,b)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ עבורו: $.f(a,b)=1$ מצד שני, $f$ חח"ע, כי אם $f(a,b)=f(c,d)$ אז: $2^c3^d=2^a3^b$ ומכיוון ש־$2,3$ ראשוניים, בהכרח: $a=c, b=d$ ולכן: $.(a,b)=(c,d)$

4. חח"ע ועל – יש כזו, לא פשוט.

<u>תמונה ותמונה הפוכה:</u>

תהיינה $A,B$ קבוצות ו־$f:A\to B$ פונקציה ביניהן.

1. לכל תת־קבוצה של התחום: $X\subseteq A$, התמונה של $X$ מסומנת $f[X]$; זו תת־קבוצה של הטווח: $f[X]\subseteq B$ המוגדרת באופן הבא:

$$f[X]=\{f(x)\,|x\in X\}$$

קבוצת כל התמונות של איברי $X$. דוגמאות:

א. $f:\{1,2,3,4,5\}\to\{1,2,4\}$, המוגדרת ע"י:

$$f(1)=f(3)=f(4)=2, f(2)=f(5)=1$$

למשל:

$$f[\{1,3,5\}]=\{f(x)\,|x\in\{1,3,5\}\}=\{f(1),f(3),f(5)\}=\{2,1\}$$

$$f\left[\{1,2,4\}\right]=\{f\left(x\right)|x\in\{1,2,4\}\}=\{f\left(1\right),f\left(2\right),f\left(4\right)\}=\{2,1\}$$

ב. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י: $f\left(x\right)=x^2$, למשל:

$$f\left[\{1,3,5\}\right]=\{f\left(x\right)|x\in\{1,3,5\}\}=\{f\left(1\right),f\left(3\right),f\left(5\right)\}=\left\{1^2,3^2,5^2\right\}=\{1,9,25\}$$

$$f\left[(2,3)\right]=\{f\left(x\right)|x\in(2,3)\}=\left\{x^2|2<x<3\right\}=(4,9)$$

כי אם $2<x<3$ אז $4<x^2<9$. כמו כן:

$$f\left[\left[-\frac{1}{2},1\right]\right]=\left\{f\left(x\right)|x\in\left[-\frac{1}{2},1\right]\right\}=\left\{x^2|-\frac{1}{2}\leq x\leq 1\right\}=[0,1]$$

אם $-\frac{1}{2}\leq x\leq 1$ אז $0\leq x^2\leq 1$.

ג. $f:P\left(P\left(\mathbb{N}\right)\right)\to P\left(\mathbb{N}\right)$, מוגדרת ע"י: $f\left(\mathcal{F}\right)=\cap\mathcal{F}$. למשל:

$$f\left[\{\{\{1\}\}\}\right]=\{f\left(x\right)|x\in\{\{\{1\}\}\}\}=\{f\left(\{\{1\}\}\right)\}=\{\cap\{\{1\}\}\}=\{\{1\}\}$$

2. לכל תת־קבוצה של הטווח: $Y\subseteq B$, התמונה ההפוכה של $Y$ מסומנת $f^{-1}\left[Y\right]$; זו תת־קבוצה של התחום: $f^{-1}\left[Y\right]\subseteq A$ המוגדרת באופן הבא:

$$f^{-1}\left[Y\right]=\{x\in A|f\left(x\right)\in Y\}$$

קבוצת כל האיברים מהתחום שהתמונה שלהם שייכת ל־$Y$; אפשר גם לומר שזו קבוצת כל המקורות של איברים מ־$Y$. דוגמאות:

א. $f:\{1,2,3,4,5\}\to\{1,2,4\}$, המוגדרת ע"י:

$$f\left(1\right)=f\left(3\right)=f\left(4\right)=2,f\left(2\right)=f\left(5\right)=1$$

למשל:

$$f^{-1}\left[\{1,4\}\right]=\{x\in\{1,2,3,4,5\}\,|f\left(x\right)\in\{1,4\}\}=\{2,5\}$$

$$f^{-1}\left[\{2\}\right]=\{x\in\{1,2,3,4,5\}\,|f\left(x\right)\in\{2\}\}=\{1,3,4\}$$

$$f^{-1}\left[\{4\}\right]=\{x\in\{1,2,3,4,5\}\,|f\left(x\right)\in\{4\}\}=\emptyset$$

ב. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י: $f\left(x\right)=x^2$, למשל:

$$f^{-1}\left[\{0,2\}\right]=\{x\in\mathbb{R}|f\left(x\right)\in\{0,2\}\}=\left\{x\in\mathbb{R}|x^2\in\{0,2\}\right\}=\left\{0,\pm\sqrt{2}\right\}$$

$$f^{-1}\left[(-1,1)\right]=\left\{x\in\mathbb{R}|x^2\in(-1,1)\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}|-1<x^2<1\right\}=(-1,1)$$

כי אם $-1<x^2<1$ אז $-1<x<1$.

$$f^{-1}\left[[2,3]\right]=\left\{x\in\mathbb{R}|x^2\in[2,3]\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}|2\le x^2\le 3\right\}=\left[-\sqrt{3},-\sqrt{2}\right]\cup\left[\sqrt{2},\sqrt{3}\right]$$

$$f^{-1}\left[\left(-1,-\frac{1}{2}\right)\right]=\emptyset$$

<u>הערות ותכונות:</u>

1. התמונה והתמונה ההפוכה לוקחות קבוצות ומחזירות קבוצות, ולכן אם $f:A\to B$, אפשר לחשוב על התמונה כעל פונקציה: $f:P\left(A\right)\to P\left(B\right)$ (ואם לא רוצים לסמן גם את הפונקציה וגם את התמונה באותה אות, אפשר לומר שהפונקציה $g:P\left(A\right)\to P\left(B\right)$ המוגדרת על ידי: $g\left(X\right)=f\left[X\right]$ היא התמונה...), ואפשר לחשוב על התמונה ההפוכה כעל פונקציה : $f^{-1}$

$.P(B) \to P(A)$

2. נדגיש את ההגדרות. $y \in f[X]$ אם ורק אם קיים $x \in X$ כך ש: $.f(x) = y$

$x \in f^{-1}[Y]$ אם ורק אם $.f(x) \in Y$

3. תהי $f : A \to B$ פונקציה, ותהיינה $.A_1, A_2 \subseteq A, B_1, B_2 \subseteq B$ אפשר לשאול איך התמונה והתמונה ההפוכה "מתנהגות" עם הפעולות על קבוצות, למשל, האם: $f[A_1 \cap A_2] = f[A_1] \cap f[A_2]$? האם $f^{-1}[B_1 \cup B_2] = f^{-1}[B_1] \cup f^{-1}[B_2]$? לשאלות הספיציפיות האלו התשובות הן לא וכן.

למשל: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ המוגדרת ע"י: $f(x) = x^2$, והקבוצות: $.\{-1\}, \{1\}$ מצד אחד, $\{-1\} \cap \{1\} = \emptyset$ ולכן: $.f[\{-1\} \cap \{1\}] = f[\emptyset] = \emptyset$ מצד שני, $f[\{1\}] = \{1\} = f[\{-1\}]$ ולכן: $.f[\{1\}] \cap f[\{-1\}]$

כמו כן:

$$x \in f^{-1}[B_1 \cup B_2] \iff f(x) \in B_1 \cup B_2 \iff f(x) \in B_1 \vee f(x) \in B_2$$

$$\iff x \in f^{-1}[B_1] \vee x \in f^{-1}[B_2] \iff x \in f^{-1}[B_1] \cup f^{-1}[B_2]$$

השתמשנו בהגדרת התמונה ההפוכה ובהגדרת איחוד לסירוגין.

4. אפשר לשאול מה הקשר בין תמונה לתמונה הפוכה - האם $f[f^{-1}[Y]] = Y$? האם $f^{-1}[f[X]] = X$? באופן כללי, לא. למשל: $f : \{1,2,3,4,5\} \to \{1,2,4\}$, המוגדרת ע"י:

$$f(1) = f(3) = f(4) = 2, f(2) = f(5) = 1$$

נתבונן, למשל, בקבוצה: $.Y = \{4\}$ מתקיים:

$$f\left[f^{-1}[Y]\right] = f\left[f^{-1}[\{4\}]\right] = f[\emptyset] = \emptyset \neq \{4\}$$

כמו כן, עבור $X = \{1\}$:

$$f^{-1}\left[f\left[X\right]\right] = f^{-1}\left[f\left[\{1\}\right]\right] = f^{-1}\left[\{2\}\right] = \{1,3,4\} \neq \{1\}$$

נשים לב ש: $f\left[f^{-1}\left[Y\right]\right] \subseteq Y$; זה נכון תמיד. כמו כן, $X \subseteq f^{-1}\left[f\left[X\right]\right]$; גם זה נכון תמיד.

נוכיח ש: $f\left[f^{-1}\left[Y\right]\right] \subseteq Y$. יהי $y \in f\left[f^{-1}\left[Y\right]\right]$, וצ"ל: $y \in Y$. לפי הגדרת תמונה, קיים $x \in f^{-1}\left[Y\right]$ עבורו: $y = f\left(x\right)$. לפי הגדרת תמונה הפוכה, $x \in f^{-1}\left[Y\right]$ ולכן: $f\left(x\right) \in Y$. לכן, $y \in Y$. הכיוון השני לא מתקיים כשיש איברים שאין להם מקור (כמו $4$ בדוגמה שלנו). לכן, אם הפונקציה $f$ היא על, גם הכיוון השני נכון ומקבלים: $f\left[f^{-1}\left[Y\right]\right] = Y$.

באופן דומה, אם $f$ חח"ע אז: $X = f^{-1}\left[f\left[X\right]\right]$.