חוברת הרצאות בקורס "גאומטריה אנליטית ודיפרנציאלית" 88201

20 באוגוסט 2016

מרצה: שי גול

קיץ -2016 תשע"ו

ערך: איתי רוזנבאום

הרצאה ראשונה - גאומטריה אנליטית

מטרה: בקורס נרצה למצוא את המקומות הגאומטרים המוגדרים ע"י משוואה מהצורה $F(x,y)=0$, למשל המעגל $(x-2)^2+(y-2)^2=5$ מוגדרת ע"י $F(x,y)=(x-2)^2+(y-2)^2-5$

משוואת ישר (ב$\mathbb{R}^2$)

$ax+by+c=0$

הערה 0.1 לכל שתי משוואות ליניאריות שאינן מיוצגות ע"י קווים מקבילים יש פתרון אחד ויחיד

תרגיל מצא מקום גאומטרי של נקודות M הנמצאות יחד עם הנקודה M_0על הישר המקביל לוקטור הנתון a

פתרון מכיוון שהוקטורים מקבילים, ההבדל היחיד ביניהם הוא באורכם. על כן קיים t המקיים $\overrightarrow{M_0M}=ta$ (*), $-\infty<t<\infty$.
תזכורת- משוואה וקטורית ב $\mathbb{R}^2$
מהצורה $v+tu$ ולכן (מכלל המקבילית) ניתן לרשום את $\overrightarrow{M_0M}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OM_0}$ (#) כאשר O ראשית הצירים.
נציב את # ב* ונקבל $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM_0}+ta$ שזו בדיוק ההצגה הפרמטרית (וקטורית) של קו ישר.

משוואה וקטורית של קטע המחבר בין A לB אם M נמצאת בין A לB אז $\overrightarrow{AM}=t\cdot\overrightarrow{AB}$ (1), ולכן מתחייב ש $0\le t\le 1$, אם $t=1$ נקבל את הוקטור $\overrightarrow{AB}$.
בנוסף, שוב ע"פ כלל המקבילית $AM=OM-OA$ (2) ולכן נציב את (2) ב(1) ונקבל $OM-OA=t\cdot(OB-OA)$ ומפה נובעת משוואת $OM=(1-t)OA+t\cdot OB$ (3) כאשר $0\le t\le 1$. משוואה 3 נקראת <u>ההצגה הוקטורית של הקטע.</u>
באופן דומה קל להגדיר ישר במרחב.

מרחב אוקלידי [1]

נגדיר מטריקה (עד מתי טופולוגיה) באמצעות משפט פתגורס, $p_1 = (x_1, y_1$ ו־$p_2 =$ (x_2, y_2) ע"י $d(p_1, p_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

תכונות המטריקה

1. $d(p_1, p_2) \geq 0$ וכן $d(p_1, p_2) = 0 \Leftrightarrow p_1 = p_2$
2. $d(p_1, p_2) = d(p_2, p_1)$
3. $d(p_1, p_3) \leq d(p_1, p_2) + d(p_2, p_3)$

הערה במרחבים וקטורים כללים, אם מסתכלים על סביבה מספיק קטנה, משפט תגורס עובד בקירוב טוב לקירוב ליניארי.

מעגל

הוא אוסף הנקודות שמרחקן מנקודה מסוימת קבוע $\{p | d(p, c) = R\}$. אם $c =$ (x_0, y_0) מרכז המעגל ואוסף הנקודות שמרחק מ c היא $p = (x, y)$ אז משוואת המעגל $R = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ ולכן משוואת המעגל היא $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = R^2$.

קואורדינטות קוטביות $x = Rcos\theta$ ו־$y = R\sin\theta$ שוזהי הצגה פרמטרית (וקטורית) של מעגל $(x_0 + R\cos\theta, y_0 + R\sin\theta)$. שטחו πR^2והיקפו $2\pi R$.

אליפסה

אוסף כל הנקודות שמרחקן משני מוקדים קבוע $\{p | d(p, c_1) + d(p, c_2) = R$.

צורה קנונית של אליפסה שמרכזה ב$(0, 0)$ והצירים שלה מקבילים לציר ה x וציר ה y, ניתן לרשום כאוסף הפתרונות $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (4) כאשר אורך הקוטר (מקביל לציר הx) הוא $2a$ ובציר הy הוא $2b$.

הצגה קוטבית של אליפסה $(a\cos\theta, bsin\theta)$, קל לבדוק שזוהי ההצגה הוקטורית המבוקשת ע"י המשוואה (4). שטח האליפסה היא πab , אך היקף האליפסה ידוע רק בקירוב.

[1] תחילה ב$\mathbb{R}^2$

היפרבולה

אוסף כל הנקודות שהפרש מרחקיהן משני מוקדים קבוע $\{p|d(p,c_1)-d(p,c_2)=2a\}$
היפרבולה קנונית: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, עוד הפרבולה מפורסמת היא $y=\frac{1}{x}$.

פרבולה

אוסף כל הנקודות שמרחקן מנקודה מסוימת ומישר קבוע

תבנית ריבועית במישור

$ax^2+2bxy+cy^2+dx+ey+f$ (5) כאשר a,b,c,d,e,f קבועים.
מטרה: לסווג תבניות לישר, מעגל וכו'
את משוואה 5 ניתן לרשום כ $\underbrace{(x\,y)\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{I}+(d\,e)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+f=0$,

נסמן $A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, קל לראות שזו מטריצה סימטרית.
ברור שI עבור כל מחובר מהצורה $A_{ij}x^ix^j$ כאשר $x=x^1$ ו$y=x^2$ כאשר $1\leq i,j\leq 2$ ברור ש$A_{11}=e_1$, $A_{12}=A_{21}=b$ $A_{22}=c$
קל לראות שהמטריצה A היא סימטרית, בליניארית ראינו שמטריצה סימטרית אמ"מ לכסינה אורתוגונלית.
ע"פ ההגדרה של סמטריות $A=A^t$ ולכן יש u,v וקטורים עצמים עם ערכים עצמיים λ_1,λ_2 המקיימים $Av=\lambda_1 v$ ו$Au=\lambda_2 u$ וu,v אורתוגונלים (מאונכים).
נוכיח זאת (שהם אורתוגונלים).
$\lambda_2<u,v>=<\lambda_2 u,v>=<Au,v>=<A^tu,v>=(A^tu)^tv=(u^tA)v=$
$u^t(Av)=<u,Av>=<u,\lambda_1 v>=\lambda_1<u,v>$ לכן
$\lambda_1<u,v>=\lambda_2<u,v>$. לכן בהכרח $\lambda_1=\lambda_2$ (לא אפשרי) [2] או ש
$<u,v>=0$ וסיימנו
עוד משפט מליניארית
יש קבוצת וקטורים עצמיים של מטריצה סימטרית שהיא בסיס אורתונורמלי למרחב.
הסבר
כלומר קיימת מטריצה מלכסנת P המקיימת $P^t=p^{-1}$ כאשר מגדירים $P\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=$
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. במשוואה (5) במקום $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ נציב $P\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.
משוואה 5: $(x\,y)A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+(d\,e)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+f=0$

[2] נראה בהמשך

נציב: $(x'\,y')P^tAP\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}+(d\,e)P\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}+f=0$

$$(x'\,y')\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}+(g\,h)\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}+f=0$$

$$\lambda_!(x')^2+\lambda_2(y')^2+gx'+hy'+f=0$$

שזו כבר צורה ריבועית ונרצה להפטר מg וh.

ז"א נחפש הזזה "שתעלים" לנו את g וh

$$\lambda_1(x'+\beta)^2=\lambda_1(x')^2+2\alpha\lambda_1x'+\lambda_1\alpha^2$$

באופן דומה

$$\lambda_2(y'+\beta)^2=\lambda_1(y')^2+2\beta\lambda_2x'+\lambda_2\beta^2$$

ולכן כדי לאפס את g נבחר $g=2\alpha\lambda_1$

$\alpha=\frac{g}{2\lambda_1}$ ובאופן דומה $\beta=\frac{h}{2\lambda_2}$.

עכשיו נעשה השלמה לריבוע עבור α ועבור β

$$\lambda_1(x')^2+\lambda_2(y')^2+gx'+hy'+f=0$$

$$\lambda_1(x'+\frac{g}{2\lambda_1})^2+\lambda_2(y'+\frac{h}{2\lambda_1})^2+f-\frac{g^2}{4\lambda_1}-\frac{h^2}{4\lambda_2^2}=0$$

$$\lambda_1(x'-\alpha)^2+\lambda_2(y'-\beta)^2+k=0 \quad (6)$$

נחלק למקרים

1. $\lambda_1=\lambda_2=0$ ע"פ משוואה 5 מקבלים שר.
2. $\lambda_1\cdot\lambda_2>0$ אליפסה (ומקרה פרטי של מעגל ממשוואה 6
3. $\lambda_1\cdot\lambda_2<0$ משוואת היפרבולה

הרצאה שנייה

14 באוגוסט 2016

בשיעור שעבר ראינו איך מוגדרת תבנית ריבועית במישור והצענו שיטה למציאת הצורה הקנונית שלה. באופן דומה ניתן לעשות זאת במרחב.

תבנית ריבועית במרחב

$ax^2+by^2+cz^2+2dxy+2exz+2fyz+gx+hy+jz+k=0$
לאחר סיבוב והזזה ניתן להגיע לאחת מהצורות הבאות:

צורות במרחב

1. אליפסואיד: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$
2. היפרבולואיד: א) יריעה אחת: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ ב) שתי יריעות: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$
3. פרבולואיד: א) אליפטי: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$ ב) היפרבולי: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$
4. חרוט: $x^2+y^2=z^2$
5. ספירת היחידה: $S^2:=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2=1\}$

חיתוך של חרוט ומישור

- אם המישור חותך בזווית קטנה מ45° מתקבלת אליפסה.
- אם המישור חותך בזווית גדולה מ45° מקבלים היפרבולה.

אי השוויון האיזו־פרמטרי

תזכורת עקום ג׳ורדן הוא עקום סגור ב$\mathbb{R}^2$ שאינו חותך את עצמו.

משפט אי השוויון האיזו־פרמטרי

לכל עקום ג׳ורדן Ω ב$\mathbb{R}^2$ שהיקפו L וכולא שטח A מתקיים:
$$\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2-\frac{A}{\pi}\geq 0 \quad (1)$$

שאלה

מהי הצורה שכולאת מקסימום שטח?

תשובה

זוהי הצורה שתיתן שוויון באי"ש (1). נראה שזה מתקיים כאשר $L = 2\pi R$ ו$A = \pi R^2$ ע"י הצבה, ולכן נקבל שצורה זו היא מעגל.

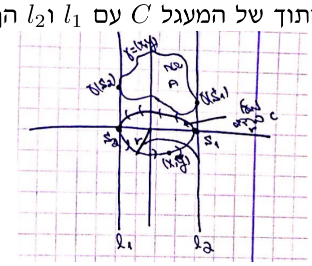
הוכחת אי השוויון האיזו־פרמטרי

תזכורת שטח של תחום Ω בעל שפה γ המורכבת ממספר סופי של עקומות סגורות מקיים (לפי משפט גרין) $S = \frac{1}{2}\int_\gamma xdy - ydx$

הבנייה הגאומטרית מתבצעת כך: נבחר שני קווים l_1, l_2 כך ש γ תחומה בין שני קווים אלו, ונזיז את הקווים עד שיגעו בγ בנקודה (ישיקו לה).

באופן דומה נניח C הוא מעגל התחום בין שני קווים אלו ומרכזו בראשית הצירים.

נסמן $\gamma = (x, y)$ פרמטריזציה ונבחר נקודות $\gamma(s_1)$ ו$\gamma(s_2)$ הנמצאות על l_1 וl_2 והנקודות החיתוך של המעגל C עם l_1 וl_2 הן S_1 וS_2 .



כעת נתחיל בהוכחה

על המעגל C נגדיר פרמטריזציה $(x, \tilde{y})$ באופן הבא:

$$\tilde{y}(s) = \begin{cases} \sqrt{r^2 - x^2(s)} & s_1 \le s \le s_2 \\ -\sqrt{r^2 - x^2(s)} & s_2 \le s \le s_1 \end{cases}$$

כעת נחשב את השטח של שני התחומים (התחום הנתון והעיגול) ביחד לפי משפט גרין:

$A + \pi r^2 = \int_\gamma xdy - \int_C -ydx$ (שימו לב שכאן בחרנו פונקציות שונות לחישוב השטח באמצעותן עם משפט גרין ממה שמופי בתזכורת)

נעביר את זה לפרמטריזציה הטבעית:

$$= \int_0^L x(s)y'_s(s)ds + \int_0^L -\tilde{y}(s)x'_s(s)ds = \int_0^L (x(s)y'_s(s)ds - \tilde{y}(s)x'_s(s))ds \le \int_0^L |x(s)y'_s(s)ds - \tilde{y}(s)x'_s(s)|ds \le \int_0^L \sqrt{(x(s)y'_s(s)ds - \tilde{y}(s)x'_s(s))^2}ds \le \int_0^L \sqrt{(x(s))^2 + (y(s))^2}ds$$

כאשר המעבר האחרון נובע מכך ש

$$(xy_s - \tilde{y}x_s)^2 = (<(x, -y), (y_s, x_s>)^2 \overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\le} (x^2 + \tilde{y}^2)(y_s^2 + x_s^2) = (x^2 + \tilde{y}^2)$$

כאשר השוויון נובע מכך שבחרנו פרמטריזציה טבעית.

ולכן $A + \pi r^2 \le \int_0^L \sqrt{(x(s))^2 + (y(s))^2}ds = \int_0^L rds = r\int_0^L 1ds = Lr$

וכעת לפי אי שוויון הממוצעים

$$\sqrt{A(\pi r^2)} \le \frac{A + \pi r^2}{2} \le \frac{L \cdot r}{2}$$

ולכן

$\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 - \frac{A}{\pi} \ge 0$ וסיימנו.

רקע למערכות צירים על משטחים

מוטיבציה

רוצים לבחור משוואות מבלי להתחייב מראש על בחירת הקוארדינטות. באנליזה וקטורית בוחרים בדרך כלל מערכת צירים אורתוגונלית ומסתכלים על וקטור v במערכת. לוקטור הנ"ל יש היטל (רכיב) על ציר x והיטל על ציר y ומתקיים $v = v_x + v_y$. נסתכל על מערכת צירים לא אורתוגונלית, עדיין נייצג ע"י x, y ונשאל כיצד נייצג את ווקטור v. יש לנו שתי אפשרויות:

1. **רכיבים קונטרה־וריאנטים:** להעביר וקטורים מקבילים לצירים העוברים דרך הקצה של v ולהשתמש באורכן של הקווים המקבילים (וכך למעשה להשתמש בכלל המקבילית). הרכיבים אשר יבחרו בדרך זו יקראו רכיבים קונטרה־וריאנטים ויסומנו $v = (v^1, v^2)$

2. **רכיבים קווריאנטים:** להוריד אנכים לצירים ולבחור את אורך ההיטל. יסומנו $v = (v_1, v_2)$.

אורך וקטור

- במע
- רכת צירים אורתוגונלית: $||v|| = \sqrt{v \cdot v} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$
- במערכת לא אורתוגונלית נחשב ע"פ משפט הקוסינוסים:

$$v \cdot v = (v^1)^2 + (v^2)^2 - 2v^1 v^2 \cos(\pi\theta)$$

טנזור מטרי

מטריצה $g = \begin{pmatrix} 1 & \cos\theta \\ \cos\theta & 1 \end{pmatrix}$ כך שנרשום את אורך הוקטור באופן הבא: $v \cdot v = \sum_{i,j} g_{ij} v^i v_j$. הטנזור המטרי מאפשר למדוד את האורך בהנתן רכיבים קונטרה־וריאנטים.

כללי הסכימה של איינשטין

נגדיר $y^j x_j := \sum_j y^j x_j$, כלומר אם בביטוי מופיע אינדקס קונטרה־ווריאנטי ואינדקס קווריאנטי, והם זהים, אז סוכמים על האנדקס הזה, וככה חוסכים את כתיבת ה־$\sum$.

עבור מטריצות ריבועיות נסמן עם אינדקס אחד עליון (אשר ייצג בד"כ שורה) ואינדקס אחד תחתון (שייצג עמודה) כך שתמיד האינדקס התחתון במטריצה יהיה מוכפל בוקטור שאחריו $A_i^j v^i = u^j$
$A_i^i = tr(A)$

תבנית בילינארית

תבנית בילינארית היא תבנית שפועלת על שני ווקטורים ומחזירה סקלר, כלומר $B:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$.

למשל, $(x_1,x_2,x_3)A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ היא תבנית בילינארית כאשר A מטריצה.

ניתן לרשום:

$B(v,u)=\sum_{i,j}B_jv^iu^j=B_{ij}v^iu^j$ כאשר באגף ימים קיימת סכימה לפי כללי איינשטין.

נרשום זאת במפורש, לדוגמא ב-$\mathbb{R}^2$, $B=\begin{pmatrix}B_{11}&B_{12}\\B_{21}&B_{22}\end{pmatrix}$ $u=\begin{pmatrix}u^1\\u^2\end{pmatrix}$ $v=\begin{pmatrix}v^1\\v^2\end{pmatrix}$

$$B(v,u)=u^tBv=(u^1,u^2)\begin{pmatrix}B_{11}&B_{12}\\B_{21}&B_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v^1\\v^2\end{pmatrix}=B_{11}u^1v^1+B_{12}u^1v^2+B_{21}u^2v^1+B_{22}u^2v^2$$

צורה ריבועית

$$Q(v)=B(v,v)=B_{ij}v^iv^j$$

אפשר לשחזק את הצורה הבילינארית מתוך הצורה הריבועית באמצעות הטענה הבאה:

טענה

B מטריצה סמטרית $\Leftrightarrow$ $B(v,u)=\frac{1}{4}(Q(v+u)-Q(v-u))$

הוכחה

נחשב:

$$Q(u+v)=B(u+v,u+v)=B(u,u)+B(v,u)+B(u,v)+B(v,v)$$
$$Q(v-u)=B(v-u,v-u)=B(u,u)-B(v,u)-B(u,v)+B(v,v)$$

ולכן:

$$Q(v+u)-Q(v-u)=2B(u,v)+2B(v,u)$$

וביטוי זה שווה ל-$4B(u,v)$ אמ"מ B מטריצה סימטרית וסיימנו.

מטריצה סימטרית ואנטי סימטרית

B_{ij} תבנית בליניארית, **לא** מטריצה ולכן האנדקסים באותו הגובה.

החלק הסמטרי של B מסומן $B_{\{i,j\}}$, $B_{\{i,j\}}=S:=\frac{1}{2}(B+B^t)$

$S_{ij}=\frac{1}{2}(B_{ij}+B_{ji})$

החלק האנטי סמטרי של B מסומן $B_{[i,j]}$, $B_{[i,j]}=A:=\frac{1}{2}(B-B^t)$

$A_{ij}=\frac{1}{2}(B_{ij}-B_{ji})$

שימו לב

$$B_{\{ijk\}} = \frac{1}{6}(B_{ijk} + B_{ikj} + B_{jik} + B_{kji} + B_{kij} + B_{kji})$$
$$B_{[ijk]} = \frac{1}{6}(B_{ijk} - B_{jik} + ..)$$

שימו לב

אם נגדיר מטריצה $c_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj}$
$c_{[ij]} = \sum_k b_{k[ja_i]_k}$[1]

למשל

$B = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, נגדיר וקטור $v^1 = 4$ $v^2 = -3$ כלומר $v = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ ונסמן:
אזי $u^i = B^i_j v^j$
$$u^1 = B^1_j v^j = \sum_j B^1_j v^j = 3 \cdot 4 + 8 \cdot (-3) = -12$$

[1] לא כל כך הבנתי מה כתוב כאן, ייתכן שיש טעות

הרצאה שלישית

איזומטריה

מטרה: למצוא פונקציה שומרת מרחק.

איזומטריה פונקציה $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ המקיימת $d(u,v)=d(f(u),f(v))$ לכל u,v.

דוגמא: אם f איזומטריה וg איזומטריה, $f+g$ אינה בהכרח איזומטריה, לדוגמא אם נבחר $f(x)=g(x)=x$, אבל אם $h=f+g=2x$ אז $d(0,1)=1$ אבל $d(h(0),h(1))=2$.

משפט 0.1 אם f איזומטריה המקיימת $f(0)=0$ אז f משמרת את המכפלה הסקלית, כלומר $<f(u),f(v)>=<u,v>$

הוכחה: אם איזומטריה אז משמרת את מרחק, אז $||v||=d(v,o)=d(f(v),f(0))=d(f(v),0)=||f(v)||$
ישירות מההגדרה (של המטריקה המושרית מהנורמה), $||u-v||=||f(u)-f(v)||$,
נעלה בריבוע ונקבל $(u-v)(u-v)=(f(u)-f(v))(f(u)-f(v))$, נפתח את הסוגריים ונקבל
$||u||^2-2uv+||v||^2=||f(u)||^2-2f(u)f(v)+||f(v)||^2$, והוכחנו קודם ש $||v||=||f(v)||$ ונקבל ש $-2uv=-2f(u)f(v)$ ולכן $uv=f(u)f(v)$ וסיימנו. ■

הערה 0.2 קל לבדוק שf וg איזומטריות אז $f\circ g$ איזומטריה (הוכחנו בתרגול)

תזכורת A אורתוגונלית אם $A^tA=I$

משפט 0.3 אם f איזומטריה המקיימת $f(0)=0$ אז קיימת מטריצה אורתוגונלית A כך ש $f(v)=Av$ לכל v.

הערה 0.4 משפט זה אומר שהאיזומטריות היחידות הן שיקופים וסיבובים.

הוכחה: נבחר בסיס אותונורמלי $\{e_i\}$ $1 \le i \le n$ (ז"א ל־$\mathbb{R}^n$). נבדוק כיצד f עובדת על וקטור הבסיס, $||f(e_i)|| = ||e_i|| = 1$.

נתון f איזומטריה וגם ש־f משמרת מכפלה פנימית (ממשפט קודם), כלומר $f(e_i) \cdot f(e_j) = e_i e_j = 0$ לכל $i \neq j$.

כתוצאה מדברים אלו ניתן לומר ש־$\{f(e_i)\}$ מהווה בסיס אורתונורמלי ל־$\mathbb{R}^n$. לכל וקטור v מתקיים:

$v \cdot e_i = f(v) \cdot f(e_i)$ ומכאן מידי $f(v) = \sum v^i f(e_i)$ (מיידי= מאלגברה ליניארית).

■

הערה 0.5 אפשר לרשום $A = \begin{pmatrix} | & | & . & . & | \\ f(e_1) & f(e_2) & . & . & f(e_n) \\ | & | & . & . & | \end{pmatrix}$

משפט 0.6 אם f איזומטריה כלשהי אז קיימים A אורתוגונלית ווקטור b כך ש־$f(v) = Av + b$

הוכחה: נגיד $b = f(o)$ ואז $g(v) := f(v) - b$, ברור ש־g איזומטריה וכן $g(0) = 0$ ולכן קיימת מטריצה אורתוגונלית A המקיימת $g(v) = Av$ ואז $f(v) = Av + b$ וסיימנו. ■

החבורה האורתוגונלית $O(n) \in M_{n\times n}$ מוגדרת ע"י $A^tA = I \Leftrightarrow A \in O(n)$. החבורה האורתוגונלית

החבורה האורתוגונלית $So(n) \le O(n)$ מוגדרת ע"י $A^tA = I \wedge det(A) = 1 \Leftrightarrow A \in O(n)$. החבורה האורתוגונלית.

פרמטריזציה

עקומה פונקציה חלקה (נגזרות רציפות) ע"י $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$. באופן דומה אפשר להגדיר $t \mapsto (\gamma_1(t), .., \gamma_n(t))$

דוגמא־ פרמטריזציה למעגל $\gamma(\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ כאשר $\theta \in [0, 2\pi]$.

הוקטור המשיק $\hat{T}(t) = \gamma'(t) = \dot{\gamma}(t) = \frac{d\gamma}{dt} = (\gamma_1', .., \gamma_n')$.

מהירות העקומה בנקודה t_0 הוא $||\gamma'(t_0)||$. זהו אורך הוקטור המשיק המעיד על מהירות התנועה.

אורך של עקומה $L(\gamma) = \int_a^b ||\gamma'(t)||dt = [\text{if } \gamma = (t, f(t))] = \int_a^b ||\sqrt{1 + (f'(x))^2}dt$

נורמל ב$\mathbb{R}^2$ נציב למשיק בנקודה t. ברור שהנורמל הוא סיבוב ב$90°$ של המשיק.

דרכים למציאת נורמל

- שימוש במטריצת סיבוב. $N = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} \\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma'_x \\ \gamma'_y \end{pmatrix}$
- פתרון המשוואה $< (\gamma'_x, \gamma'_y), (N_x, N_y) >= 0$

דוגמאות לעקומות

- ישר: $\gamma(t) = \overrightarrow{a} + t \cdot \overrightarrow{v}$
- פרבולה: $\gamma(t) = (t, t^2)$, $\gamma'(t) = (1, 2t)$. מהירות: $||\gamma'(t)|| = \sqrt{1+4t^2}$.

הרכבה אם $\gamma : [a.b] \to \mathbb{R}^n$ו$\tilde{\gamma} : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ ניתן להגדיר פונקציה חלקה $P(q) = [c,d] \to [a.b]$ ומתקיים כל השרשרת בגזירה

פרמטריזציה נורמלית פרמטריזציה כך שלכל t $\frac{d\gamma}{dt} \neq 0$.

פרמטריזציה טבעית

פרמטריזציה בה לכל t הוקטור המשיק בגודל 1. על מנת לקבל זאת מעקומה $\gamma(t)$ נגדיר $S(t) = \int_0^t \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{d\gamma^i}{dq}\right)^2} dq = \int_0^t ||\gamma'(t)|| dq$. זוהי פונקציה מונוטונית עולה ולכן הפיכה, כלומר מוגדר $t(s)$ עולה ולכן הפיכה כלומר מוגדר $\gamma(T) := t(s)$ $\gamma(t(s))$ למשל $\gamma(t) = (t,t)$ $\gamma'(t) = (1,1)$ ולכן $S = \int_0^t \sqrt{2}dq = \sqrt{2}t$ ולכן $t = \frac{s}{\sqrt{2}}$ ולכן העקומה $\gamma(s) = (\frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{s}{\sqrt{2}})$ ולכן $\frac{d\gamma}{ds} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

תכונה חשובה וקטור המשיק של פרמטריזציה טבעית הוא תמיד וקטור יחידה (תכף נוכיח)

$s = \int_0^t ||\frac{d\gamma}{dq}|| dq$ ולכן $\frac{ds}{dt} = ||\frac{d\gamma}{dt}||$.

נראה שאכן הוקטור המשיק בפרמטריזציה טבעית הוא יחידה.

$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d\gamma}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{d\gamma}{dt} ||\frac{d\gamma}{dt}||^{-1}$ ולכן $||\frac{d\gamma}{dt}|| = (\frac{d\gamma}{ds})(\frac{d\gamma}{ds})^{-1} = 1$

משפט 0.7 אורך העקומה הוא אינוריאנטי (נשמר) תחת איזומטריה.

הוכחה: $\tilde{\gamma} = f(\gamma) = A\gamma + b$, לכן $\frac{d\tilde{\gamma}}{dt} = A\frac{d\gamma}{dt}$, נבדוק מהו אורך העקומה $\frac{d\tilde{\gamma}}{dt}$ ונשם לב שבמקום להסתכל על $||\frac{d\tilde{\gamma}}{dt}||$ ניתן להסתכל על $\frac{d\tilde{\gamma}}{dt} \cdot \frac{d\tilde{\gamma}}{dt} = ||\frac{d\tilde{\gamma}}{dt}||^2$ ולכן $\frac{d\tilde{\gamma}}{dt} \cdot \frac{d\tilde{\gamma}}{dt} = (A \cdot \frac{d\gamma}{dt})^2 (A \cdot \frac{d\gamma}{dt}) = (\frac{d\gamma}{dt})^t A^t A (\frac{d\gamma}{dt}) = \frac{(d\gamma)^t}{dt}\frac{d\gamma}{dt} = ||\frac{d\gamma}{dt}||$ וסיימנו ■

וקטור משיק נורמלי עבור פרמטריזציה טבעית $\gamma(s)$ הוקטור המשיק לעקומה $\hat{T}(s) = \frac{d\gamma(s)}{ds}$ ולכן $||\hat{T}(s)|| = 1$. עבור $\mathbb{R}^2$ נהוג לסמן את הוקטור המשיק $\hat{T}(s) = \begin{pmatrix} cos(\alpha(s)) \\ sin(\alpha(s)) \end{pmatrix}$ כאשק αהיא הזווית בין המשיק לציר הx.

באופן דומה מגדירים וקטור נורמל $\hat{N}(s)$ כוקטור יחידה המאונך ל$\hat{T}(s)$.

דרכים למציאת נורמל יחידה (כן, עשינו את זה כבר, נתן שוב)

- שימוש במטריצת סיבוב. $N = \begin{pmatrix} -sin(\alpha(s)) \\ cos(\alpha(s)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} \\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cos(\alpha(s)) \\ sin(\alpha(s)) \end{pmatrix}$
- פתרון המשוואה $0 = \, < (-sin(\alpha(s)), cos(\alpha(s))), (cos(\alpha(s)), sin(\alpha(s))) >$

הרצאה 4

עקמומיות של עקומה

$\kappa := \frac{d\alpha}{ds} = \alpha'(s)$. העקמומיות מייצגת את מהירות השתנות הזווית כאשר הולכים לאורך עקומה (במהירות 1). ראינו בתרגול שעקמומיות של מעגל היא $k = \frac{1}{R}$ ועקמומיות של ישר היא 0. (כי הוא לא עקום).

סימנו $\hat{T}(s) = (\cos(\alpha(s)), \sin(\alpha(s))$ להיות המשיק ו$\hat{N}(s)$ להיות נורמל (הכובע מסמן יחידה). קל להגיע למשוואות הבאות:

$\frac{d\hat{T}}{ds} = (-\sin(\alpha(s)), \cos(\alpha(s)) \cdot \alpha'(s)$ ונקבל את

משוואת פרנה סרה הראשונה בדו מימד: $\hat{T}'(s) = \hat{N}(s) \cdot \kappa(s)$

באופן דומה $\frac{d\hat{N}}{ds} = (-\cos(\alpha(s)), -\sin(\alpha(s)) \cdot \alpha'(s)$ ולכן נקבל:

$\hat{N}'(s) = -\hat{T}(s) \cdot \kappa(s)$ ובאופן דומה קל לחשב

$\hat{N}''(s) = -\hat{T}(s) \cdot \kappa^2(s)$

משפט 0.1 תהי $v(t)$ פונקציה וקטורית של t אזי $||v|| = \text{const} \Leftrightarrow \frac{dv}{dt} \perp v$

הוכחה: $||v|| = \text{const} = <v, v> = \text{const}$, נגזור ונקבל

$\frac{d(v \cdot v)}{dt} = 2\frac{dv}{dt} \cdot v = 0$ ■

שימו לב $|\kappa(s)| = ||\gamma''(s)||$ **הוכחה:** $\gamma'(s) = (\cos(\alpha(s)), \sin(\alpha(s))$,

$\gamma''(s) = \alpha'(s)(-\sin(\alpha(s), \cos(\alpha(s))$

$(-\sin(\alpha(s), \cos(\alpha(s))$ זהו נורמל ונתון שהוא מאורך יחידה, לכן

$||\gamma''(s)|| = |\alpha'(s)|||\hat{N}||$ ולכן $||\gamma''(s)|| = |\alpha'(s)|$ ■

הערה 0.2 סמנו $\hat{T} = \frac{d\gamma}{ds}$ ומאנטגרציה $\gamma = \int \hat{T} ds + \gamma_0$

מסקנה 0.3 מסקנה

אם ידוע $\hat{T}(s)$ וכן נקודת התחלה γ_0 אז אנו יודעים את כל המסלול של $\gamma(s)$.

משפט 0.4 אם ידועה נקודת התחלה γ_0 וידוע $\hat{T}(0)$ אז הפונקציה $\kappa(s)$ מגדירה חד ערכית את העקומה $\gamma(s)$

הוכחה: אם ידוע $\hat{T}(0)$ קל לחשב את $\hat{N}(0)$ ואז משוואת פרנה־סרה נקבל המשוואות: $\frac{d\hat{T}(s)}{ds}=\kappa\hat{N}(s)$ ו$\frac{dN}{ds}=-\kappa\hat{T}(a)$.

המערכת היא ליניארית הומוגנית (מסדר 1) ויש תנאי התחלה ולכן מקיימת את משפט היחידות ולכן יש פתרון יחיד לכל s ■

מסקנה 0.5 עקומה מוגדרת ע"י העקמומיות שלה עד כדי איזומטריה של המישור.

נוסחה לחישוב העקמומיות נתונה $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ בפרמטריזציה $\gamma(\theta)=(x(\theta),y(\theta))$

אז נקבל ש $\kappa(\theta)=\frac{\det\begin{pmatrix}x' & y'\\ x'' & y''\end{pmatrix}}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$ **הוכחה:** $s=\int_a^\theta||\gamma'(\xi)||d\xi$

$\tan(\alpha(s))=\frac{y'(\theta)}{x'(\theta)}$

$\alpha(s)=\arctan\left(\frac{y'(\theta)}{x'(\theta)}\right)$

העקמומיות מקיימת $\kappa(s)=\alpha'(s)$ ולכן נגזור

$$\frac{d\alpha}{ds}=\frac{1}{1+\left(\frac{y'}{x'}\right)^2}\cdot\left(\frac{y'}{x'}\right)=\frac{y''x'-x''y'}{(x')^2}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{y'}{x'}\right)^2}=\frac{y''x'-x''y'}{(x')^2+(y')^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x'^2+y'^2}}=\frac{\det\begin{pmatrix}x' & y'\\ x'' & y''\end{pmatrix}}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$ ■

למשל במקרה של אליפסה $\gamma(\theta)=(a\cos(\theta),b\sin(\theta))$

$\gamma'(\theta)=(-a\sin\theta,b\cos\theta)$

$\gamma''(\theta)=(-a\cos\theta,-b\sin\theta)$,

$$\kappa(\theta)=\frac{\det\begin{pmatrix}-a\sin\theta & b\cos\theta\\ -a\cos\theta & -b\sin\theta\end{pmatrix}}{\sqrt{(-a\sin\theta)^2+(b\cos\theta)^2}}=\frac{ab}{\sqrt{(-a\sin\theta)^2+(b\cos\theta)^2}}$$.

תכונות של עקמומיות

1. עקמומיות אינה תלויה בבחירת הפרמטריזציה, נובע מהגדרת העקמומיות שניתנת דרך הפרמטריזציה הטבעית.
2. סימן העקמומיות מתהפך עם שינוי האוריינטציה של המישור
3. איזומטריה אוקלידית השומרת את האורינטציה במישור שומרת את העקמומיות
4. נניח ורוצים לחשב עקמומיות בנקודה נתונה בעקומה A וB כאשר שתי העקומות הפוכות באוריינטציה, אז הזווית של המשיק בA ובB נבדלים בπ כי $\alpha=\beta+\pi$ ואז אפשר לקשר גם בין העקמומיות עבור כיוונים שונים, כי $\kappa_B(s)=\frac{d(\beta(s))}{ds}=\frac{d(\alpha(d)+\pi)}{ds}=-\kappa_\alpha(s)$

מה קורה במקרה של הצגה של פונקציה סתומה

D_B האופרטור של Bataman

$$D_B(F) = -\det\begin{vmatrix} 0 & F_x & F_y \\ F_x & F_{xx} & F_{xy} \\ F_y & F_{yx} & F_{yy} \end{vmatrix}$$

העקמומיות בהצגה סתומה (נתונה ע"י $F(x,y)=0$) היא
$\kappa = \frac{D_B(F)}{||\nabla F||^3}$

למשל נמצא את העקמומיות המקסימלית של $y=x^2$ נגדיר $F(x,y)=y=x^2$, $F_x=-2x$ $F_y=1$ $F_{xx}=-2$ $F_{yy}=0$ $F_{xy}=0$, נציב ונקבל
$\kappa = \frac{2}{\left(\sqrt{(4x^2+1)}\right)^3} \le 2$.

מעגל משיק

מעגל משיק של עקום בנקודה מוגדר כמעגל שמרכזו במרכז העקמומיות של העקום ושרדיוסו הוא רדיוס העקמומיות. מחפשים מעגל שרדיוסו כמעגל שמשיק לעקומה בנקודה p והעקמומיות שלו בנקודה שווה לעקמומיות העקומה. נבנה את המשוואה של המעגל עובר בנקודה p.

(כלומר, עקמומיות המעגל היא $\frac{1}{r}$ ולפי זה נקבע את הרדיוס).

באופן כללי, המשוואה המבוקשת היא $\gamma(s)+\frac{1}{\kappa}\hat{N}(a)$ זוהי מרכז המעגל המשיק.

אוולוט ואינוולוט

אינוולוט־ קצת נפנופי ידיים

1. מצמידים מיתר על העקומה עד נקודה מסויימת P' ("מניחים חוט לאורך העקומה")
2. מחזיקים את קצה החוט ומתחילים להרים את החוט בצורה הדוקה
3. העקומה הנוצרת מהרמת החוט בצורה הדוקה מ P_1 נקראת involute של העקומה γ.
4. הנקודה P' שבחרנו היא נקודה שרירותית באופן דומה. אם נבחר נקודה P'' נקבל עקומה C_2
5. Huyggeus הוכיח שכל האיוולוטים זרים בזוגות (ז"א לא נחתכים, כמו C_1, C_2)

נוסחה לחישוב האינוולוט $\overrightarrow{t}(s) = \overrightarrow{\gamma(s)} + (M-S)\gamma'(t)$ כאשר M אורך החוט ששמנו על העקומה וS היא הנקודה.

אוולוט של עקומה

1. נצייר משיק לעקומה $\hat{T}$ בנקודה P לγ
2. N הנורמל למשיק בנקודה p.
3. ניקח שתי נקודות P וQ קרובות אחת לשנייה. ככל ש P וQ מתקרבות אחת לשניה הן נפגשות בנקודה מסויימת. נקודת מפגש זו היא מרכז העקמומיות של העקומה γבנקודה p .
4. כלומר, האוולוט היא עקומה של מרכזי המעגלים המשיקים לעקומה המקורית.

מסקנה 0.6 האוולוט של האינוולוט היא העקומה המקורית! האינוולוט הוא הנורמל למרכזי המעגלים.

עקמומיות כוללת

נניח $\gamma : [0, L] \to \mathbb{R}^2$ עקום רגולרי בפרמטריזציה טבעית.

עקמומיות כוללת של עקום $K = \int_0^L \kappa(s)ds$ כאשר $\kappa(s)$ עקמומיות העקום בנקודה $\gamma(s)$

משפט 0.7 יהיה $\gamma : [0, L] \to \mathbb{R}^2$ עקום רגולרי בפרמטריזציה טבעית וחלק בC^2, אם $\gamma'(0) = \gamma'(L)$ אז המספר $\frac{K}{2\pi}$ הוא שלם.

הוכחה: $K = \int_0^L \alpha'(s)ds = \alpha(L) - \alpha(0)$ כאשר $\alpha : [0, L] \to \mathbb{R}$. מצד שני, **האינדקס** של עקומה מוגדר ע"י $\text{ind } \gamma'(0) = \frac{\alpha(L)-\alpha(0)}{2\pi} = \frac{K}{2\pi}$ ולכן שילוב שני הדברים יביא ש $\frac{K}{2\pi}$ מספר שלם. ■

משפט $Hopf$ עקמומיות כוללת של עקום פשוט וסגור שווה $K = \pm 2\pi$.

הרצאה 5

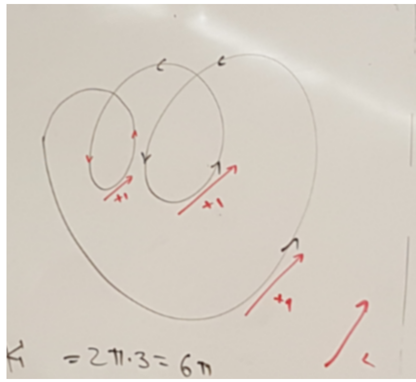
תזכורת ראינו דרך לחשב עקמומיות כוללת דרך משפט hupf שאומר $K = \int_0^L \alpha'(s)ds$ כאשר αפרמטריזציה טבעית בקטע $[0,L]$, הגדרנו את אינדקס העקומה להיות $\mathrm{ind}_{\gamma'}(0) = \frac{\alpha(L)-\alpha(0)}{2\pi}$.

נרצה למצוא דרך קלה לחישוב עקמומיות כוללת, עבור עקומים סגורים. במרוכבות ראינו שאינדקס של עקומה הוא מספר ההקפות שהעקומה מקיפה סביב נקודה כלשהי (משפט קושי וכדומה), ננסה להשתמש בכלים האלו כדי למצוא את העקמומיות של עקומה סגורה. ברור שאם העקומה סגורה (ג'ורדן) (וראינו שיעור שעבר) ש $K = \int = \pm 2\pi$. נראה שניתן למצוא עקמומיות כוללת K של עקומים סגורים ללא חישוב פונקציות העקמומיות.

איך נעשה זאת? ניתן לחשב $ind_{\gamma'}(0)$ באופן הבא:

1. נקבע קרן L כללית כלשהי (סתם ישר במישור, לא משנה)
2. נחבר מספרים ϵ_p עבור נקודות החיתוך p של העקום הנגזר γ' עם הקרן (ז"א למעשה מעבירים משיק לעקומה בהתאם לאותו כיוון של הישר L)
3. נסמן את הנקודות על העקום המקור γ ואת כל הנקודות p בהן המשיק מקביל ובעל כיוון זהה לקרן L.
4. אם כיוון המשיק נגד כיוון השעון יקבל הניקוד $+1$, אחרת יקבל -1

דוגמא ניקח משהו בצורת ∞ (כמו במבחן בטופו, כצורה ב$\mathbb{R}^2$). ניקח את L להיות משיק בכיוון ציר x שכיוונות ב"מעגל הימני" נגד כיוון השעון. ישנן 2 נקודות בהן ניתן להעביר משיק שמקביל (ובכיוון!) של ציר x, הנקודה הימנית התחתונה והשמאלית העליונה. בנקודה הימנית למטה נתאים את המספר $+1$ כי המשיק נגד כיוון השעון, בשמאלית העליונה זה עם כיוון השעון ולכן 1- ולכן סך הכל העקמומיות הכוללת היא $K = 2\pi(n_{p_1} + n_{p_2}) = 2\pi(1 + (-1)) = 0$



דוגמא נוספת

מסקנה 0.1 כל שני משיקים בכיוונים מנוגדים סוגרים "מעגל" ולכן הניקוד של מעגל יהיה 2π

עקומים קמורים

עקום קמור עקום מישורי חלק בC^1 נקרא קמור אם (הגדרות שקולות)

- אם העקום נמצא מצד אחד של המשיק שלו בכל נקודה
- כל שתי נקודות בתחום Ω שחוסם העקום ניתן לחבר בקו ישר שמוכל בΩ כאשר קו ישר הוא מהצורה $\lambda x + (1-\lambda)y$ $\lambda \in [0,1]$

משפט 0.2 עקום רגולרי סגור, פשוט וחלק בC^2 הינו קמור $\Leftrightarrow$ אין שתי נקודות על העקום שבאחת העקמומיות חיובית ובשנייה שלילית.

הוכחה: נוכיח בשני הכיוונים.

$(\Leftarrow)$ נניח והתחום קמור, נוכיח שהעקמומיות עולה ממש או יורדת ממש וברור שנוסף שהסכום שלה עולה ל2π או יורד ל-2π. נניח בשלילה שקיימות נקודות, אחת בה העקמומיות חיובית והשנייה בה שלילית. תחילה ממשפט hopf ידוע $\alpha(L) - \alpha(0) = \pm 2\pi$.

אם $S_2 \neq S_1$ ובכל זאת $\alpha(S_1) = \alpha(S_2)$ קיימת נקודה S_3 שהיא בכיוון ההפוך לS_1וS_2 ולכן מתקיים השוויון $\gamma'(s_1) = \gamma'(s_2) = \gamma'(S_3)-$. ברור ששלושת הישרים האלו מקבילים, נבחר את הישר האמצעי מביניהם וברור שהוא מחלק את התחום ה"קמור" לשניים ולכן התחום לא קמור.

$(\Rightarrow)$ נתון $\gamma : [0, L] \to \mathbb{R}^2$ שהיא חלק מC^2 ברור ש$\gamma(0) = \gamma(L)$ $\gamma'(0) = \gamma'(L)$, בה"כ נניח כי העקמומיות אי שלילית, $S \in [0, L]$ $\kappa(S) \geq 0$. נניח שהעקום (התחום) אינו קמור. נתבונן בנקודה p על העקום כך שהמשיק L בנקודה p מחלק את העקום (בהכרח יש כזאת כי התחום אינו קמור). נסמן בq^+ וq^- את הנקודות של העקום המרוחקות ביותר מהישר L. באחד מהם נניח q^+ הכיוון של המשיק ככיוון הישר L,

ובנקודה q^- הכיוון הוא הפוך. הנחנו כי $\kappa'(S) \geq 0$ ולכן פונקצית הזווית $\alpha(s)$ אינה יורדת־ ממשפט hopf סיבוב כולל צריך להיות 2π.

לכן ישנם שני מקרים אפשריים:

1. הקשת של העקום מנקודה p לנקודה q^+ היא קו ישר.
2. קשת העקום מהנקודה q^+ ועד לנקודה p היא קו ישרץ בכל מקרה בשני מקרים אלו נקבל סתירה שהישר L מחלק את העקום. ■

קודקודים של עקומים קמורים

קודקוד העקום מוגדר כנקודה על העקומה γ שבה נגזרת העקמומיות $\kappa'(s) = 0$

מסקנה 0.3 הנקודות שבהן העקמומיות מקבלת מינימום או מקסימום (מקומי) הם הקודקודים.

דוגמא למשל, אם נסתכל על האוולוט של האליפסה, יש קודקודים.

מצאנו עקמומיות של האליפסה $\kappa(\theta) = \frac{ab}{(\sqrt{(a\sin\theta)^2+(b\cos\theta)^2})^3}$ ואם נסתכל על האליפסה $(x-1)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1$. קל לחשב $k_{max} = 3$ שמתקבל ב$\frac{\pi}{2}$ ו$k_{min} = \frac{1}{9}$ שמתקבל ב$0, \pi$

משפט 0.4 לכל עקום מישורי סגור קמור ופשוט קיימים לפחות ארבעה קודקודים.

למשל במעגל כל נקודה היא קודקוד כי העקמומיות קבועה.

עקומים ב$\mathbb{R}^3$

תזכורת ראינו את משוואת פרנה סרה $\begin{pmatrix} \hat{T}' \\ \hat{N}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa \\ -\kappa & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{T} \\ \hat{N} \end{pmatrix}$ וקל לחלץ $\hat{T}' = k\hat{N}$ ו$\hat{N}' = -\kappa\hat{T}$. הגדרנו עקמומיות חיובית נגד כיוון השעון ועקמומיות שלילית עם כיוון השעון. נרצה להגדיר מערכת צירים ימנית ב$\mathbb{R}^3$ כך ש $(\hat{T}, \hat{N}, \hat{B})$ מערכת צירים ימנית, כאשר $\hat{B}$ ניצב ל$\hat{T}$ו$\hat{N}$ יחד עם $\hat{T}$ הוא יוצר מישור שבסביבה מספיק קטנה של הנקודה ניתן לקבוע עד כמה מישור זה משתנה.

מגדירים את משוואות פרנה־סרה ב$\mathbb{R}^3$ באופן

$$\begin{pmatrix} \hat{T}' \\ \hat{N}' \\ \hat{B}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{T} \\ \hat{N} \\ \hat{B} \end{pmatrix}$$

כאשר κ היא העקמומיות וtau מסמן עד כמה מהר משתנה המישור שבו העקומה נמצאת בסביבה מספיק קטנה של הנקודה. שורות 1 ו2 במטריצה הם כמו במישור (משוואות פרנה סרה), את הנכונות של משוואה

3 נצטרך להוכיח. נשם לב שגם כאן כמו במישור קיבלנו מטריצה אנטי־סימטרית וזה מכיוון שהמטריצה שמעבירה בין $\hat{T}\hat{N}$ ו$\hat{B}$ היא מטריצה אורתוגונלית והנגזרת של הטרנספורמציה האורתוגונלית היא אנטי סימטרית $O^t(t)\cdot O(t) = I$ ולכן $\frac{dO}{dt} = -(\frac{dO}{dt})^t$. **הוכחה:** $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} = (\hat{T},\hat{N},\hat{B})\begin{pmatrix}\hat{T}\\\hat{N}\\\hat{B}\end{pmatrix}$, נגזור ונקבל $(T,N,B)+ \begin{pmatrix}T'\\N'\\B'\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} = (T',N',B')\begin{pmatrix}\hat{T}\\\hat{N}\\\hat{B}\end{pmatrix}$ (1) (הכובע ירד כי הוקטור לא בהכרח וקטור יחידה). **נסמן** $\begin{pmatrix}\hat{T}\\\hat{N}\\\hat{B}\end{pmatrix} A = \begin{pmatrix}T'\\N'\\B'\end{pmatrix}$ (2). נציב את 2 ב1

$A = -A^t \; A + A^t = 0$ ■

מסקנה 0.5 אם המטריצה אורתוגונלית מקיימת מד"ר ליניארית אז המטריצה חייבת להיות אנטי־סימטרית.

נוכיח את המשוואה של פרנה־סרה בתלת מימד בדו מימד: $T'(s) = \kappa(s)\hat{N}(s)$ ו$\hat{N}'(s) = -\kappa(s)\hat{T}(s)$.

טענה 0.6 נגזרת של הוקטור בנורמל נתונה ע"י הנוסחה $B'(s) = -\tau(s)N(s)$ כאשר $\tau : [0,L] \to \mathbb{R}^2$ רציפה.

הוכחה: מכיוון ש $<\hat{B},\hat{B}>= 1$ נובע ע"י הגזירה $<b,b'>= 0$ באופן דומה (3) $<\hat{B},T>= 0$. בחרנו אמ"מ ניצבים. כאשר נגזור את (3) נקבל $<B',\hat{T}> + <\hat{B},T'>=<B',\hat{T}> + <\hat{B},\kappa\cdot\hat{N}) =<B',\hat{T}> = 0$ (המעבר השני לפי משוואת פרנה סרה הראשונה) ולכן $<B',\hat{N}>= 0$.

ולכן הנגזרת של B' מאונכת לT ולכן היא מכוונת בכיוון של וקטור נורמלי ראשי N. ולכן מכך ניתן להגדיר עבור קבוע τ $B'(s) = -T(s)\hat{N}(a)$ (4) אם נרצה נורמל יחידה אפשר להגדיר $\hat{N}(s) = \frac{1}{\kappa(s)}\gamma''(s)$ (הוכחנו זאת במישור) ■

פיתול מספר ממשי $\tau(s)$ נקרא פיתול של העקום בנקודה $\gamma(s)$. משוואה (4) היא משוואת פרנה סרה השלישית במרחב. נשאר להוכיח את משוואת פרנה סרה השנייה:

טענה 0.7 $N'(s) = -\kappa\hat{T}(s) + \tau\hat{B}(s)$

הוכחה: ברור ש$<\hat{N},\hat{N}>= 1$, נגזור גזירה סתומה ונקבל $2\hat{N}N' = 0$ ולכן $\hat{N}N' = 0$. באופן דומה ראינו $<\hat{N},\hat{T}>= 0$ כי משיק ונורמל הם אורתוגונלים. נגדיר את המכפלה הפנימית ונקבל $<N',\hat{T}> + <\hat{N},T'>= 0$ ע"פ משוואת סרנה פרנה

$<N',\hat{T}>=-k$. מגזירה של $<\hat{N},\hat{B}>=0$ ולכן $<N',\hat{T}>+<\hat{N},B'>=0$ ומטענה קודמת $<N',\hat{T}>=\tau$ ולכן נקבל $N'=-\kappa\hat{T}+\tau\hat{B}$ שזוהי המשוואה השנייה המבוקשת. ■

נרצה למצוא דרך יעילה לחישוב העקמומיות והפיתוח ב$\mathbb{R}^3$ $\gamma''(s)=T'(s)=k\hat{N}$

$\gamma'''(s)=\kappa'\hat{N}+N'\kappa=\kappa'\hat{N}+\kappa(-\kappa\hat{T}+\tau\hat{B})=-\kappa^2\hat{T}+\kappa'\hat{N}+\kappa\tau\hat{B}$.

תזכורת־ מכפלה משולשת היא נפח המקבילון ומחושבת כך $(a,b,c)=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

. נחשב את המכפלה המשולשת הבאה:

$$(\gamma',\gamma'',\gamma''')=(\hat{T},\kappa\hat{N}(s),-\kappa^2\hat{T}+\kappa'\hat{N}+\kappa\tau\hat{B}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -\kappa^2 \\ 0 & \kappa & \kappa' \\ 0 & 0 & \kappa\tau \end{vmatrix}=\kappa^2\tau$$ [1]

$\tau(s)=\frac{(\gamma',\gamma'',\gamma''')}{\kappa^2}$.

תזכורת $||\kappa(s)||=||\gamma''(s)||$ (אין משמעות לכיוון ב$\mathbb{R}^3$ ולכן נורמה.

לסיכום:

$\kappa=\frac{||\gamma'\times\gamma''||}{||\gamma'||^3}$ $\tau=\frac{(\gamma',\gamma'',\gamma''')}{||\gamma'\times\gamma''||^2}$

למשל עבור העקום $\gamma(s)=(s,s^2,s^3)$ $\gamma'(s)=(1,2s,3s^2)$ $\gamma''(s)=(0,2,6s)$ ו$\gamma'''(s)=(0,0,6)$ ולכן נקבל ש$\gamma'\times\gamma''=\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 2s & 3s^2 \\ 0 & 2 & 6s \end{vmatrix}=(6s^2,-6s,2)$. באופן דומה

$||\gamma'||=\sqrt{1+4s^2+9s^4}$, $||\gamma'\times\gamma''||=\sqrt{36s^4+36s^2+4}$ $(\gamma',\gamma'',\gamma''')=12$

$\kappa(s)=\frac{2\sqrt{1+9s^4+9s^5}}{(\sqrt{1+4s^2+9s^2}^3}$

$\tau(s)=\frac{12}{36s^4+36s^2+5}=\frac{3}{9s^4+9s^2+1}$

---

[1] קרדיט ליעלת־חן על מציאת הטעות בהרצאה פה

הרצאה 6

תזכורת ראינו את משוואת פרנה־סרה במרחב: $\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{T} \\ \hat{N} \\ \hat{B} \end{pmatrix}$
והוכחנו הנכונות שלהם כאשר κהעקמומיות וτ הפיתול, כלומר כמה העקום מישורי בסביבת הנקודה. ראינו ש$\tau \equiv 0$ אז העקומה נמצאת בתוך מישור יחיד.

תרגיל הוכח שלקו בורג (המוגדר ע"י $\gamma(\theta) = (a\cos\theta, a\sin\theta, b\theta)$ המספר a מתאר את רדיוס הכריכות והמספר b מגדיל את המרחק בין הכריכות, שזוהי הפסיעה) ישנן פונקציות פיתול ועקמומיות קבועה.

פתרון שיעור שעבר מצאנו נוסחאות לחישוב פיתול ועקמומיות במרחב:
$\kappa(\theta) = \frac{||\gamma' \times \gamma''||}{||\gamma'||^3}$ $\tau(\theta) = \frac{(\gamma', \gamma''\gamma''')}{||\gamma' \times \gamma''||^2}$.
$\gamma' = (-a\sin\theta, a\cos\theta, b)$ $\gamma'' = (-a\cos\theta, -a\sin\theta, 0)$ $\gamma''' = (a\sin\theta, -a\cos\theta, 0)$
$||\gamma'|| = \sqrt{a^2+b^2}$, $||\gamma' \times \gamma''|| = a\sqrt{a^2+b^2}$, $(\gamma', \gamma''\gamma''') = a^2 b$

$$\kappa = \frac{||\gamma' \times \gamma''||}{||\gamma'||^3} = \frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^3} = \frac{a}{a^2+b^2}$$

$$\tau = \frac{(\gamma', \gamma''\gamma''')}{||\gamma' \times \gamma''||} = \frac{a^2 b}{(a\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{b}{a^2+b^2}$$

ולכן העקמומיות והפיתול קבועים.

תרגיל הוכח שאם לעקומה ישנן עקמומיות ופיתול קבועות אז היא בהכרח קו בורג.

פתרון ניקח את γ כפרמטריזציה הטבעית של העקום. מספיק להראות שהמשיקים לעקומה נמצאים בזווית קבועה עם וקטור כיוון כלשהו (ביחס למישור XY). נניח u וקטור כיוון, $<\gamma'(s), u> = c$ לכל s שנבחר וu וקטור כלשהו. ממשוואת פרנה סרה, $N' = -\kappa\hat{T} + \tau\hat{B}$, $N'' = -\kappa T' + \tau B' = -\kappa(\kappa \cdot \hat{N}) = \tau(-\tau\hat{N})$ כאשר המעביר השני נובע מכך שידוע ש$\tau' = \kappa\hat{N}$ ו$B' = -\tau N'$. בסה"כ $N'' = (-\kappa^2 + \tau^2)\hat{N}$. אנו מכוונים לפתירת מד"ר מסדר שני, נסמן $\omega^2 = \kappa^2 + \tau^2$ ונפתור את המשוואה הדיפרנציאלית:

$\hat{N}(s) = A\cos(\omega s) + B\sin(\omega s)$. ידוע ממשוואת פרנה סרה:
$T'(s) = \kappa\hat{N}(s) = \kappa(A\cos(\omega s) + B\sin(\omega s))$ וע"י אינטגרציה

$\hat{T}(s) = \frac{\kappa}{\omega}(A\sin(\omega s) - B\cos(\omega s)) + c$ כאשרא בחרנו c מתאים כדי שיתקבל וקטור יחידה.

נסמן $u = A \times B$ ולכן ברור שu מאונך לA וb,

$< \gamma'(s), u >=< f(s), u >=< \frac{\kappa}{\omega}(A\sin(\omega s) - B\cos(\omega s) + c, u >=< c, u >= const$ לפיכך γ היא קו בורג.

משטחים במרחב

עקומים במרחב ניתן לייצג ע"י פונקציות עקמומיות ופיתול.

הגדרה 0.1 משטח במרחב $\mathbb{R}^3$ מוגדר בהעתקה חלקה $\gamma : U \to \mathbb{R}^3$ כאשר $U \subseteq \mathbb{R}^2$ תחום מישורי.

לכן, נקודה על משטח מתוארת ע"י שתי קוארדינטות u_1וu_2שמרכיבות את U ואז המשטח $\gamma : U \to \mathbb{R}^3$, נראה כן:

$$\gamma = (x(u), y(u), z(u)) = (x(u_1, u_2), y(u_1, u_2), z(u_1, u_2))$$

למשל עבור הספירה $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ חלקים קטנים של הספירה נתונים לפרמטריזציה ע"י תחומים מישוריים, **למשל** $p_1(x, y) = (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$ $p_2(x, y) = (x, y, -\sqrt{1 - x^2 - y^2})$ $p_3 = (x, \sqrt{1 - x^2 - y^2}, y)$ $p_4 = (x, -\sqrt{1 - x^2 - y^2}, y)$ $p_5 = (\sqrt{1 - x^2 - y^2}, x, y)$ $p_6 = (-\sqrt{1 - x^2 - y^2}, x, y)$ כאשר $x^2 + y^2 < 1$

מפה מוגדרת ע"י העתקה של תת קבוצה U של $\mathbb{R}^2$ לתוך $\mathbb{R}^3$

אטלס אוסף כל המפות שיכסה את המשטח

שימו לב כל מפה נותנת פרמטריזציה של חלק מהמשטח ע"י תחום דו מימדי.

עקמומיות של משטח

יהי $M \subset \mathbb{R}^3$ משטח, $U \subset \mathbb{R}^2$, $\delta : U \to \mathbb{R}^3$ אם נתון עקום מישורי $\gamma : [a.b] \to U$ וניתן להגדיר הרכבה באופן הבא:

$[a, b] \xrightarrow{\gamma} U \xrightarrow{\delta} \mathbb{R}^3$, נגדיר $\varphi : [a.b] \to \mathbb{R}^3$ ע"י $\varphi = \delta \circ \gamma$, עקום זה נמצא על משטח M. את הפרמטר בקטע $[a.b]$ נסמו בθ וקטור המהירות של העקום φ,

$\varphi' = \frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{d\delta}{du_1}u_1' + \frac{d\delta}{du_2}u_2'$ מסמנים $\delta_1 = \frac{d\delta}{du_1}$, $\delta_2 = \frac{d\delta}{du_2}$

δ_1 הוא וקטור המהירות של העקום $\delta_1(u_1, c_1)$ ובאופן דומה δ_2 היא המהירות של העקום $\delta_2(u_2, c_2)$ ולכן בסה"כ נרשום

$\varphi' = \delta_1 u_1' + \delta_2 u_2'$ נקודה $\delta(u)$על המשטח $M \subset \mathbb{R}^3$ נקראת נקודה רגולרית אם הוקטורים $\delta_{1,2}$ בת"ל.

דיפרנציאל יהי $M \subset \mathbb{R}^3$ משטח רגולרי ו$\delta : U \to \mathbb{R}^3$ פרמטריזציה שלו. נניח ש$a \in U$ נקודה בתחום הפרמטרים המייצגת את הנקודה על המשטח כלומר $A = \delta(a)$.

מישור המשיק מישור משיק שיסומן $T_A(M)$ למשטח M בנקודה רגולרית A מוגדר כאוסף וקטורים וקטורי מהירות של עקומים על M העוברים דרך A .

באופן דומה נגדיר $T_a U$ כאוסף וקטורי המהירות של העקומים בU העוברים דרך a. מייחסים לוקטור מהירות את זוג הקוארדינטות שלו. (זהו למעשה המשיק למשטח הדו־מימד) נהוג להגדיר העתקה ליניארית $d\delta_1 : T_A U \to T_A M$ הנקראת דיפרנציאל. לסיכום את $x \in T_a$ הוא וקטור מהירות של העקום $\gamma(0) = 0$ $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to U$,
$\frac{d\gamma}{d\theta} = (\theta = 0) = x$

נתאר את המישור המשיק $T_A M$ למשטח M בנקודה רגולרית A (שמוגדר כאוסף וקטורי המהירות של עקומים על M העוברים דרך נקודה A).

ז"א למעשה עשינו סוג של עיוות לעקומה.

תבנית יסודית ראשונה (מטריקה רימנית)

המטרה למצוא דרך לתאר את מידת העיוות באורכים של הוקטורים הנעשה דרך הדיפנרציאל שהגדרנו, כאשר $M \subset \mathbb{R}^3$ ו$\delta : U \to M$ משפה ומגדירים $d\delta_a : T_a(U) \to T_A M$ שהיא איזומורפיזם ליניארי $A = \delta(a)$.

תבנית יסודית ראשונה $I_a : T_a U \times T_a U \to \mathbb{R}$ מוגדרת כתבנית בילינארית $I_a(x_1, x_2) =< d\delta_a(x_1), d\delta_a(x_2) >$ כאשר $x_{1,2} \in T_a U$ ז"א הגדרנו דרך מכפלה פנימית ולכן שומרת על התכונות הבאות:

1. $I_a(x_1, x_2)$ היא תבנית ביליניארית כלומר לכל שאלה x_1, x_1', x_2 מתקיים $I_a(x_1 + x_2', x_2) = I_a(x_1, x_2) + I_a(x_1', x_2)$ באופן דומה סגירות לכפל בסקלר $I_a(\lambda x_1 x_2) - \lambda I_a(x_1, x_2)$

2. ברור שהיא סמטרית (מתכונות מכפלה פנימית)

3. התבנית היסודית הראשונה אי שלילית $I_a(x, x) \geq 0$ ומתקיים שוויון אמ"מ כאשר $x = 0$

ולכן התבנית היסודית הראשונה מגדירה מכפלה סקלרית חדשה על המישור $T_a U$ ז"א מקבלים ב$\mathbb{R}^2$ מכפלה סקלרית חדשה התלויה בנקודה a. נחשב את התבנית היסודית הראשונה נסמן

$x_1=(v_1,v_2)$ $x_2=(w_1,w_2)$ ו$d\delta_a(x_1)=\delta_1v_1+\delta_2v_2$ באופן דומה $d\delta_a(x_2)=\delta_1w_1+\delta_2w_2$. אם נציב זאת במכפלה הפנימית
$I_a(x_1,x_2)=<\delta_1v_1+\delta_2v_2,\delta_1w_1+\delta_2w_2>=\sum_{i,j=1}^2 v_iv_j <\delta_i,\delta_j>$ ונהוג לסמן $g_{ij}=<\delta_i,\delta_j>$ שהן פונקציות חלוקות בנקודה $a\in U$ ולכן קיבלנו $I_a(x_1,x_2)=\sum_{i,j=1}^2 v_iw_jg_{ij}$ (1) ברור שניתן לרשום את המטריצה כך:
$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix}$ צורה (1) נקראת מטריקה רימנית והדטרמיננטה של מטריקה רימנית
$g=\det\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix}=g_{11}g_{22}-g_{12}^2>0$ לפי קושי רומן.

דוגמא נניח שהמשטח M הוא גרף של פונקציה $f:U\to\mathbb{R}$, כלומר M נתון בפטרמטריזציה $\delta(x,y)=(x,y,f(x,y))$ כדי לחשב את התבנית היסודית הראשונה נמצא נגזרות חלקיות $\delta_x=(1,0,f_x)$ $\delta_y=(0,1,f_y)$ לפי התבנית היסודית הראשונה $g_{11}=<\delta_x\delta_x>=1+f_x^2$ $g_{11}=g_{12}=f_xf_y$ $g_{22}=1+f_y^2$
ואז התבנית היסוגית הראשונה $ds^2=(f_x^2+1)dx^2+2f_xf_ydydx+(f_y^2+1)dy^2$. אם נחשב דטרמיננטה של התבנית היסודית (נהוג לסמן g כדטרמיננטה) $g=\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{vmatrix}=(f_x^2+1)(f_y^2+1)-f_x^2f_y^2=1+f_x^2+f_y^2$

אורך של עקום על משטח

כל עקום בתחום U של פרמטרים מגדיר עקום על המשטח. בהנתן $M\subset\mathbb{R}^2$ רגולרי עם מפה $\delta:U\to M$ כאשר $U\subset\mathbb{R}$ מישור $\gamma:[a,b]\to U$ הגדרנו $\varphi=\delta\circ\gamma:[a.b]\to\mathbb{R}^3$ על משטח M .
נחשב את אורכו של העקום φ נסמן אורך זה L $L=\int_a^b||\varphi'(s)||ds=\int_a^b\sqrt{<\varphi'(s),\varphi'(s)>}ds$ מהגדרת התבנית היסודית הראשונה
$<\varphi'(s),\varphi'(s)>=I_{\varphi(s)}(\gamma'(s),\gamma'(s))$
$L=\int_a^b\sqrt{I_{\varphi(s)}(\gamma'(s),\gamma'(s))}=\int_a^b\sqrt{g_{11}\gamma_1'^2+2g_{12}\gamma_1'\gamma_2'+g_{22}\gamma_2'^2}$ כאשר $g_{ij}=g_{ij}(\gamma(s))$

הרצאה 7

בפרקים הקודמים ראינו דרך טובה לחשב אורך של עקום על משטח $L=\int_a^b\sqrt{g_{11}\gamma_1'^2+2g_{12}\gamma_1'\gamma_2'+g_{22}\gamma_2'^2}$ ובצורה מקוצרת אפשר לרשום $L=\int_a^b\sqrt{(\gamma'(t))^tG\gamma'(t)}dt$ כאשר $G=\begin{pmatrix}g_{11} & g_{12}\\ g_{12} & g_{22}\end{pmatrix}$.

הנוסחה מבטאת אורך של עקום מרחבי על משטח M המיוצג ע"י עקום מישורי בתחום הפרמטרים U, ז"א התבנית היסודית הראשונה, מעקמת את המישור ומכאן אפשר למדוד את אורך העקום במשטח.

זווית בין וקטורים

ניקח שני וקטורים x_1,x_2 בU (בתחום) המשיקים לעקומה בטווח, ונרצה לבדוק את הזווית בין y_1,y_2 המייצגים את הוקטורים בטווח. מאלגברה ליניארית ידוע ש $\cos\alpha=\frac{<y_1,y_2>}{||y_1||\cdot||y_2||}$ כאשר $y_1,y_2\in T_AM$ כלומר הם שני וקטורים משיקים למשטח רגולרי M בנקודה A (שהיא התמונה של a).

ברור ש $y_i=d\delta_a(x_i)\in T_AM$ וברור שנגדיר $A=\delta(a)$ (מעביר את הנקודה a שנמצא על מישור למשטח M בנקודה A

מתקיים השוויון הבא

$$\cos\alpha=\frac{<y_1,y_2>}{||y_1||\cdot||y_2||}=\frac{<d\delta_a(x_1),d\delta_a(x_2)>}{\sqrt{<d\delta_a(x_1),d\delta_a(x_1)>\cdot<d\delta_a(x_2),d\delta_a(x_2)>}}=\frac{I_a(x_1,x_2)}{\sqrt{I_a(x_1,x_1)\cdot I_a(x_2,x_2)}}$$

אם נסמן $x_1=(v_1,v_2)$ $x_2=(w_1,w_2)$ ואז

$$\cos\alpha=\frac{v_1w_1g_{11}+(v_1w_2+v_2w_1)g_{12}+v_2w_2g_2}{\sqrt{\sum_{i,j=1}^2 v_iv_jg_{ij}}\cdot\sqrt{\sum_{i,j=1}^2 w_iw_jg_{ij}}}$$

שטח של משטח

איך נעשה זאת?

1. נחלק את התחום U ע"י ישרים $u_1=\mathrm{const}$ $u_2=\mathrm{const}$ לריבועים קטנים עם אורך צלע $\epsilon>0$.
2. נבצע העתקה δ למשטח, העתקה הזו מעבירה כל ריבוע קטן כזה לצורה המוגבלת ע"י עקומים.

3. נגדיר העקומים $u_1 \to \delta(u_1, c_2)$ ו$u_2 \to \delta(c_1, u_2)$

4. למעשה אנו מקבלים בתמונה מקבילית הבנוייה מהוקטורים $\delta_1 \cdot \epsilon$ ו$\delta_2 \cdot \epsilon$

5. שטח המקבילית הוא שטח המקבילית הוא $\Delta S = ||\delta_1 \cdot \epsilon \times \delta_2 \cdot \epsilon|| = ||\delta_1 \times \delta_2||$

6. שטח המשטח הוא $S = \lim\limits_{\epsilon \to 0} \sum \Delta S_i = \lim\limits_{\epsilon \to 0} \sum ||\delta_1 \times \delta_2|| \cdot \epsilon^2$

7. נוסחה זו מגדירה לנו אנטגרל $S = \iint_U ||\delta_1 \times \delta_2|| du_1 du_2 \quad (\star)$

עד עכשיו עשינו בדומה לאנפי 4, נראה לייצג את $(\star)$ לפי התבנית היסודית הראשונה.

למה 0.1 $||a \times b||^2 = \det \begin{pmatrix} < a, a > & < a, b > \\ < a, b > & < b, b > \end{pmatrix}$

הוכחה: נסמן הזווית בין a לb **ע"י** α

$||a \times b|| = ||a|| \cdot ||b|| \cdot |\sin \alpha|$ $\cos \alpha = ||a|| \cdot ||b|| =< a, b >$, נעלה את המשוואות בריבוע ונקבל

$||a \times b||^2 + (< a, b >)^2 = ||a||^2 ||b||^2$ נעביר אגף ונקבל

$$||a \times b||^2 = ||a||^2 ||b||^2 - (< a, b >)^2 = \det \begin{pmatrix} < a, a > & < a, b > \\ < a, b > & < b, b > \end{pmatrix}$$

נקבל $||\delta_1 \times \delta_2|| = \det \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix} = \det G = g$

לבסוף נציב ונקבל

$$S = \iint_U ||\delta_1 \times \delta_2|| du_1 du_2 = \iint_U \sqrt{g} du_1 du_2$$ ■

העתקת גאוס

נניח שנתונה פונקציה רציפה $A \mapsto n(A)$ לכל נקודה $A \in M$ נגדיר וקטור נורמל $n(A)$ המקיים $n(A) \perp T_A M$.

אם יש פונקציה כזו, אומרים שהיא מגדירה שדה וקטורי נורמלי על M.

אם המשטח M קשיר אז קיימים שני שדות נורמלים, כאשר בחירה תתבצע בהתאם לאוריינטציה של M.

נניח $n(A)$ נקודה על ספירת היחידה $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ מקבלים העתקה

$n : M \to S^2,\ A \to n(A)$ (כלומר, לוקחים נקודה על המשטח, מוצאים מישור משיק, לוקחים נורמל ומעתיקים אותו לספירת היחידה (כנקודה))

העתקה שכזאת נקראת העתקת גאוס. בהנתן וקטורים δ_1, δ_2 שייכים ל$T_A M$ בלתי תלויים, ראינו ש $n(A) = \pm \frac{\delta_1 \times \delta_2}{||\delta_1 \times \delta_2||}$

$||\delta_1 \times \delta_2|| = \sqrt{g}$

$n(A) = \pm \frac{\delta_1 \times \delta_2}{\sqrt{g}}$ (הסימן בהתאם לאוריינטציה שבחרנו).

תבנית יסודית שנייה

בהנתן משטח רגולרי $M \subset \mathbb{R}^3$ ופרמטריזציה $\delta : U \to M$ ונניח שהמשטח מכוון, וכלומר יש נורמל יחידה רציף, נוצרת העתקת גאוס ולמעשה אנו נגדיר את ההרכבה הבאה:
$\varphi = n \circ \delta$,$\varphi : U \xrightarrow{\delta} M \xrightarrow{n} S^2$

סימון $T_{n(A)}(S^2)$ את אוסף כל הוקטורים המאונכים ל$n(A)$, כלומר מישור משיק.

תבנית יסודית שנייה בהנתן משטח רגולרי M ונקודה A נגדיר $\mathbb{I}_a : T_aU \times T_aU \to$ $\mathbb{R}$ $\delta(a) = A$
(נשם לב $d\varphi_a(x) \in T_{n(A)}S^2$)
$x, y \in T_aU$ כאשר (*) $\mathbb{I}_n(x, y) = - < d\delta_a(x), d\varphi_a(y) >$
נחשב את התבנית היסודית השנייה נסמן
$y = (y_1, y_2)$ $x = (v_1, v_2)$ נגדיר את הדיפרנציאל ב(*)
$d\delta_a(x) = \delta_1 v_1 + \delta_2 v_2$
$d\varphi_a(y) = \varphi_1 w_1 + \varphi_2 w_2$
כאשר מגדירים $\varphi_1 = \frac{2n}{2u_i} = n_i$
אם כך, נציב את כל הנתונים האלה במשוואה (*)
(**) $\mathbb{I}_a(x, y) = - \sum_{i,j=1}^{2} v_i w_j < \delta_i \varphi_j >$
מסמנים $b_{ij} = - < \delta_i, \varphi_j >= - < \delta_i, n_j >$
ואז ע"י הצבה ב (**)
$\mathbb{I}_a(x, y) = \sum_{i,j=1}^{2} v_i w_j b_{ij}$

שימו לב התבנית היסודית השנייה היא סמטרית **הוכחה:** ברור כי $< \delta_i, n >= 0$ ולאחר גזירה (של כפל) נקבל
$< \delta_{ij}, n > + < \delta_i, n_j >= 0$
$b_{ij} = - < \delta_i, n_j >=< \delta_{ij}, n >=< (\delta_j)_i, n >= - < \delta_i, n_i >= b_{ji}$ ■

המשמעות הגאומטרית של התבנית היסודית השנייה

בהנתן נקודה $A = \delta(a)$ על משטח ונורמל $n(a)$, עבור נקודה כלשהי הקרובה לa נחשב את המכפלה הסקלרית
$d = d(u) =< n, \delta(u) - \delta(a) >$ כאשר $d(u)$ מהווה מרחק בין הנקודה $\delta(u)$ לבין המישור המשיק T_AM בנקודה קבועה A .
אם נפתח את המכפלה הפנימית היא נראית כך
$d(u) =< n, \delta_1 \Delta u_1 + \delta_2 \Delta u_2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{2} \delta_{ij} \Delta u_i \Delta u_j$
ברור ש $< n, \gamma_i >= 0$ ולכן $\approx \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{2} b_{ij} \Delta u_i \Delta u_j$

מסקנה 0.2 התבנית היסודית השנייה המייצגת את הפונקציה $d(u)$ בסביבה של הנקודה A עד כדי איברים מסדר שלישי.

אופרטור הצורה

מגדירים את S להיות אופרטור הצורה
$\mathbb{I}_a(x,y) =< Sx, y >=< x, Sy >$
אם נפעיל את התבנית היסודית השנייה
הגדרנו $\mathbb{I}_a(x,y) = x^t By$ ו $b_{ij} =< \delta_{ij}, \hat{n} >$
אופרטור הצורה מוגדר לקיים:
$\mathbb{I}_a(x,y) =< Sx, y >=< x, Sy >$
אם נחליף כל אחד מהם:
$x^t By = (Sx)^t Gy = x^t G(Sy)$
ברור ש $(Sx)^t Gy = x^t s^t Gy$
ולכן מתחייב $B = S^t G$
בסה"כ נקבל את השוויון הבא:
$B = B^t = G^t \cdot S = G \cdot S$ ולכן
$S = G^{-1}B$

מה משמעות אופרטור הצורה? מתאר את השינוי בנורמל על המישור כאשר נזוז סביב המשטח.

נהוג להגדיר את אופרטור הצורה כך: האופרטור מוגדר גאומטרית כך:
$S : T_pM \to T_{\hat{n}_p}(S^2)$
כלומר מגודר וקטור משיק $w \in T_pM$
ומקיים $S \cdot w = -d_p\hat{n}(w)$
כלומר פרמטר הצורה מתאר את השינוי בנורמל על המשטח כאשר נזוז סביב המשטח.

למשל בטורוס, הפרמטריזציה היא $X(u,v) = ((c+a\cos v)\cos u, (c+\cos v)\sin u, a\sin u)$
.

ברור שוקטורי הבסיס הם X_u, X_v
ולכן כדי לחשב את הנורמל
$\hat{n} = \frac{X_u \times X_v}{||X_u \times X_v||}$
$\hat{n} = -(c + a\cos v)(\cos u \cos v, \cos u \cos v, 0)$
קל למצוא את פרמטר הצורה, את B ואת G^{-1}.
שניהם מתקבלים מהתבנות היסודיות
$$B = \begin{pmatrix} (c + a\cos v)\cos v & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ולכן $G^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{(c+a\cos v)^2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{a} \end{pmatrix}$

$$S = G^{-1}B = \begin{pmatrix} -\frac{\cos v}{c+a\cos v} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{a} \end{pmatrix}$$

נרצה לחשב זאת ישירות מהנורמל נסתכל על הנורמל:

מצאנו $\hat{n} = -(c+a\cos v)(\cos u\cos v, \cos u\cos v, 0)$

$$n_u = (-\sin u\cos v, \cos u\cos v, 0)$$

$$n_v = (-\cos u\sin v, -\sin u\sin v, 0)$$

$$X_u = (-(c+a\cos v)\sin u, (c+a\cos v)\cos u, 0)$$

$$X_v = (-a\cos u\sin v, -a\sin u\sin v, a\cos v)$$

אפשר לרשום $-S(X_u) = N'_u$

$$-S(X_v) = N'_v$$

$$S(X_u) = -\frac{\cos v}{c+a\cos v}X_u$$

$$S(X_v) = -\frac{1}{a}X_v$$

$$\begin{pmatrix} S(X_u) \\ S(X_v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\cos v}{c+a\cos v} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{a}x_u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_u \\ x_v \end{pmatrix}$$ [1]

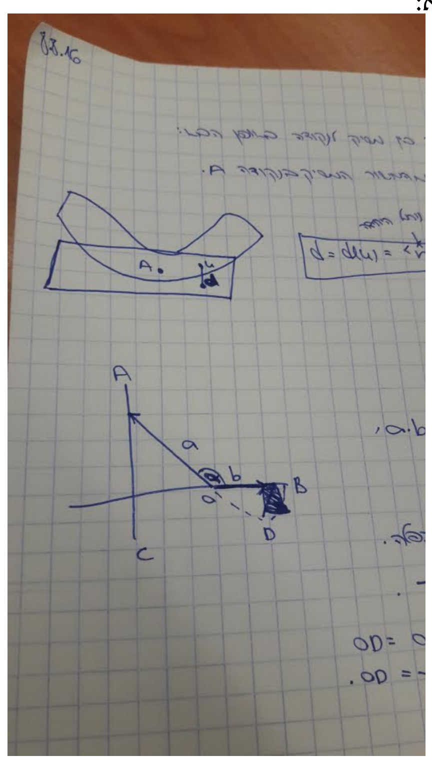
[1] יעלת־חן שוב רצתה קרדיט על תיקון טעות, או כמו שאומרת "בזכותי אתם לא נכשלים בקורס"

הרצאה 8

מספר הבהרות משיעור שעבר

ראינו שהתבנית השנייה מתקשרת למרחק בין מישור משיק לנקודה, ושאלנו מה המרחק של הנקודה u מהמישור המשיק לנקודה A .

המרצה אמר לנו שהנוסחה לחישוב היא $d = d(u) =< \hat{n}, \delta(u) - \delta(a) >$ (למרחק זה מצאנן קחרוב ממעלה שנייה לתבנית היסודית השנייה). אבל לא הבנו איך זה בדיוק יוצא:



פירוט את המכפלה הסקלרית הגדרנו $a \cdot b = |a| \cdot |b| \cdot \cos\alpha$ כאשר α הזווית ביו a לb

ברור שאם אחד מהוקטורים הוא אפס אז גם המכפלה. ההיטל של וקטור b על וקטור a בציור (2) $-OD = ba$
מצד שני מהמשולש OBD נקבל $OD = OB \cdot \cos(180 - \beta)$
$OD = -OB \cos\alpha$
באופן דומה מחשבים ההיטל של הוקטור a על הוקטור b .
$a_b = |a| \cos\alpha$
ולכן בסה"כ נקבל $a \cdot b = |a| \cdot b_a = |b| a_b$ בכפוף לסימן (ולתנאי התקנון)

מסקנה 0.1 מכפלה סקלרית של שני וקטורים שווה למכפלת האורך של אחד מהוקטורים בהיטל של השני.

מרחק נקודה ממישור

$M_1 = (x, y, z)$ נקודה הנמצאת מחוץ למישור $Ax + By + Cz + D = 0$
המרחק מנקודה M_1 למישור היא אורך האנך $M_1 L$ מנקודה M_1 למישור

משפט 0.2 המרחק מנקודה M_1 כנ"ל למישור כנ"ל היא
$d = \frac{|Ax_1 + By + cZ + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

ואז אם נחזור להוכחה שלנו
$d(u) = \frac{<\hat{n}, (\delta(u) - \delta(a)>}{||\hat{n}||} = <\hat{n}, \delta(u) - \delta(a)>$ כי זהו נורמל היחידה.[1]

אופרטור הצורה

אופרטור הצורה $S : T_p M \to T_{\hat{n}} S^2$
בנקודה p מוגדר על וקטור משיק $w \in T_p M$ כך ש $S_w = -d_p \hat{n}(w)$
כלומר הוא מינוס הדיפרנציאל של העתקת גאוס שהגדרנו לפני שני שיעורים.
מהגדרת הדיפרנציאל ראינו שמתקיים $\delta(0) = p$ ו$\delta'(0) = w$ ואז
$S_w = -(\hat{n} \circ \delta)'(0)$
ראינו גם כי וקטור הנורמל לM בנקודה p מקביל לוקטור הנורמל לS^2 ב$n\hat{(p)}$ ולכן $T_p M$ מקביל ל$T_{n\hat{(p)}} S^2$ וניתן להתיחס לS כאופרטור מ$T_p M$ לעצמו.
מצאנו $<Sx, y> = <x, Sy>$ (כי $S = S^t$).
אפשר לבדוק (חישוב קצת ארוך) ש $B = S \cdot G$ ולכן $S = G^{-1} B$, ז"א אפשר למצוא את אופרטור הצורה כך.
נשם לב שאם $S = G^{-1} B$ אז $B = B^t = G \cdot S = G^t \cdot S$
$x^t B y = x^t (S^t G) y = (Sx)^t G y$ ובאופן דומה ניתן להפוך הפוך ולכן נקבל
$\mathbb{I}_a(x, y) = <Sx, y> = <x, Sy>$

[1] פרטי הטריוויה שנזרקו במהלך ההוכחה ולא ברור לכם למה נאמרו, זה כי משמשים להוכחת המשפט

לסיכום

התבנית היסודית השנייה תבנית בילנארית אשר מוגדרת ע"י
$B(x,y) =< Sx, y >$ ביחס לבסיס $\{X_u, X_v\}$ של המרחק המשיק ומיוצגת ע"י
המטריצה

$$b_{11} =< X_{uu}, \hat{n} >$$
$$b_{22} =< X_{vv}, \hat{n} >$$
$$b_{21} = b_{12} =< X_{uv}, \hat{n} >$$

דוגמא

נגדיר אליפסואיד $\delta(u,v) = \begin{pmatrix} a\cos u \cos v \\ a\cos u \sin v \\ c\sin u \end{pmatrix}$

נחשב תחילה את התבנית היסודית הראשונה

$$g_{11} =< \delta_u, \delta_u >= a^2 \sin^2 u + c^2 \cos^2 u$$
$$g_{12} = g_{21} =< \delta_u, \delta_v >= 0$$
$$g_{22} =< \delta_v, \delta_v >= a^2 \cos^2 u$$

מכאן, קל להציב במטריצה G .

באופן דומה נחשב את המטריצה B. תחילה נחשב את הנורמל

$$\hat{n} = \frac{\delta_u \times \delta_v}{||\delta_u \times \delta_v||} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ -a\sin u \cos v & -a\sin u \sin v & c\cos u \\ -a\cos u \sin v & a\cos u \cos v & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{a^2 \sin^2 u + c^2 \cos^2 u}} \begin{pmatrix} c\cos u \cos v \\ c\cos u \sin v \\ a\sin u \end{pmatrix}$$

נשאר לחשב את הנגזרות מסדר שני

$$\delta_{uu} = \begin{pmatrix} -a\cos u \cos v \\ -a\cos u \sin v \\ -c\sin u \end{pmatrix}$$

ולכן הלאה ונקבל

$$B = \begin{pmatrix} < \delta_{uu}, \hat{n} > & < \delta_{uv}, \hat{n} > \\ < \delta_{uv}, \hat{n} > & < \delta_{vv}, \hat{n} > \end{pmatrix}$$
$$B = \frac{ac}{\sqrt{a^2 \sin^2 u + c^2 \cos^2 u}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2 u \end{pmatrix}$$

כלומר קיבלנו את B שהיא מלוכנסת ותבנית יסודית שנייה.

כלומר בהנתן עקומה $\gamma(t)$

$$\frac{d\hat{n}}{dt} = \frac{d}{dt} n(\hat{\gamma(t)}) = \sum_i \frac{d\hat{n}}{dx^i} \frac{d\gamma}{dt} = \frac{d \cdot \hat{n}}{du} \cdot \frac{du}{dt} + \frac{d\hat{n}}{dv} \cdot \frac{dv}{dt}$$
$$n(t_k) = n(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \frac{d\hat{n}}{dt} dt$$

ז"א התבנית היסודית השניה מקשרת בין המסלולים על המפה לרמת הכיפוף שלהם.

ואז קל לחשב $S = g^{-1} B$ (1)

נניח $a = c$

$$g = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a\cos^2 u \end{pmatrix}$$

מ(1) נקבל

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}$$

עקמומיות של משטח

הגדרנו כבר עקמומיות עבור עקומה (מסילה). נגדיר עקמומיות עבור משטח.

ערכי העקמומות הראשיים הם הע"ע של S (אופרטור הצורה) והכיוון הראשיים הם הוקטורים העצמיים המתאימים אשר מאונכים זה לזה.

עקמומיות גאוס מוגדרת להיות $\kappa = \det S = \frac{\det B}{\det G} = \kappa_1\kappa_2$ עקמומיות. (כאשר $\kappa_{1,2}$ ערכי העקמומיות הראשיים)

עקמומיות ממוצעת מוגדרת להיות $H = \frac{1}{2}tr(S) = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2)$

למשל אם נסתכל בגליל, אפשר לרשום לו מפה

$$\delta = \begin{pmatrix} R\cos u \\ R\sin u \\ v \end{pmatrix}$$

נחשב $\delta_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\delta_u = \begin{pmatrix} -R\sin u \\ R\cos u \\ 0 \end{pmatrix}$

$G = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $G^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{R^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\hat{n} = \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -R & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$G^{-1}B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{R} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = S$$

$$\kappa = \frac{\det B}{\det G} = 0 \quad H = -\frac{1}{2R}$$

עולה השאלה מה זה אומר $\kappa = 0$.

עבור גליל זה קורה מכיוון שאפשר לקפל נייר לגליל בלי לעוות אותו (במקרה הזה לקמט), למכשל בכדור זה בלתי אפשרי.

דוגמא

ניקח טורוס, $X = \begin{pmatrix} (c+a\cos v)\cos u \\ (c+a\cos v)\sin u \\ a\sin v \end{pmatrix}$

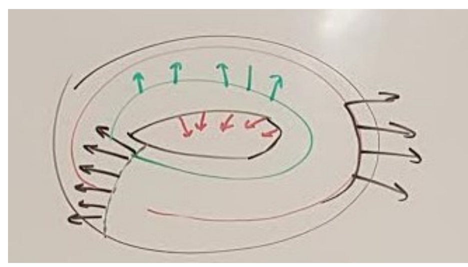
קל לחשב $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (c+a\cos v)\cos v \end{pmatrix}$

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(c+a\cos v)^2} \end{pmatrix}$$

$$S = G^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{-\cos v}{c+a\cos v} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{a} \end{pmatrix}$$

$$\kappa = \begin{vmatrix} -\frac{\cos v}{c+a\cos v} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{a} \end{vmatrix} = \frac{\cos v}{a(c+a\cos v)}$$

$$H = -\frac{c+2a\cos v}{2a(c+a\cos v)} = \frac{\cos v}{a(c+a\cos v)}$$



מעשה בחמישה (או ארבעה) נורמלים

הנורמל שמעורבב ירוק עם אדום כאן u קבוע רק v משתנה ולכן ע״פ אופרטור הצורה הנורמל מתנה ב$-\frac{1}{a}$

הנורמל ירוק (הולך על הסופגניה) כאן על המעגל העליון של הטורוס $v = \frac{\pi}{2}$ ואז אופרטור הצורה בכיוון u היא 0 .

הנורמל השחור נמצא על המעגל כשהולכים על צידו (בעיגול) ז״א $v = 0$ ולכן המקדם המתאים ע״פ אופרטור הצורה $-\frac{1}{c+a}$

הנורמל האחרון היא הנורמל הפנימי (כמו האצבע שמכניסים לטבעת[2])
כאן $v = \pi$ ולכן במקום שיהיה שלישי המקדם של פרמטר חיובי ונקבל $\frac{1}{c-a}$

[2]מוקדש ליעלת־חן הבל״חית

תזכורת־משתני איינשטין

$$A_{ij}B^{jk}=\sum_j A_{ij}B^{jk}$$
$$A_{i,j}=\frac{\partial A_i}{\partial x^j}$$
$$A\prime_{ij}=\frac{\partial^2 A}{\partial x^i \partial x^j}$$

ראינו בנוסף בהנתן מטריצה g_{ij}, מגדירים g^{ji} להיות ההופכית של g_{ij} כלומר $g_{ij}\cdot g^{jk}=\delta_i^k$ כאשר δ_i^k מטריצה המורכבת מאפסים ואחדים, כלומר

$$\delta_j^i=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq 0\end{cases}$$

מקדמי כריסטורפל

בהנתן פרמטריזציה של משטח $\delta:U\to M$

לאחר שחישנו את הנגזרות החלקיות $\delta_{11},\delta_{12},\hat{n}$ אז את הנגזרות החלקיות אפשר לרשום כקומבינציה ליניארית, כלומר

$(\delta\prime_{ij})$ מסמל נגזרת לפי i ואז לפי j .

$$\delta\prime_{11}=\Gamma_{11}^1\delta_{11}+\Gamma_{11}^2\delta_{12}+b_{11}\hat{n}$$
$$\delta\prime_{21}=\delta\prime_{12}=\Gamma_{12}^1\delta_{11}+\Gamma_{12}^2\delta_{12}+b_{12}\hat{n}$$
$$\delta\prime_{22}=\Gamma_{22}^1\delta_{11}+\Gamma_{22}^2\delta_{12}+b_{22}\hat{n}$$

באופן כללי ניתן לרשום (לפי הסכם הסכימה של איינשטין)

(2) $\delta\prime_{ij}=\Gamma_{ij}^k\delta_{1k}+b_{ij}\hat{n}$

ואז Γ_{ij}^k נקרא מקדמי קריסטופל והם מוגדרים לפי הנוסחאות

$b_{ij}=<\delta_{1ij},\hat{n}>$

ואז נשאר לחשב את 6 המספרים

$\Gamma_{11}^1\Gamma_{12=21}^1\ \Gamma_{22}^1\Gamma_{11}^2\Gamma_{12=21}^2\Gamma_{21}^2$

מה זה נותן?

אם יש לנו יריעה ווקטור משיק לנקודה אנו רוצים לדעת איך הוקטור המשיק משתנה עם שינוי הנקודה. במשטח עקום רוצים להמשיך באותו כיוון ולכן ניתן להשתמש בהיטל על המישור (שישמור כיוון)

הקשר בין התבנית היסודית הראשונה למקדמי כריסטופל

$<\delta\prime_{ij},\delta\prime_m>=<\Gamma_{ij}^k\delta\prime_{ij},\delta\prime_m>=\Gamma_{ij}^k<\delta\prime_k,\delta\prime_m>=\Gamma_{ij}^k g_{km}$ (3) (שימו לב שבאגף ימין יש סכימה)

שימו לב $g_{ij'm} = \frac{\partial}{\partial x^m} < \delta_{'j}, \delta_{'j} >=< \delta_{'im}, \delta_{'j} > + < \delta_{'jm}, \delta_{'i} >= \Gamma^k_{im} g_{kj} + \Gamma^k_{jm} g_{ki}$
באופן דומה
$g_{jm'i} = \Gamma^k_{mi} g_{kj} + \Gamma^k_{mj} g_{ki}$
$g_{mi'i} = \Gamma^k_{ij} g_{km} + \Gamma^k_{mj} g_{ki}$
ולכן מחיבור וחיסור ונקבל
$g_{mi'j} + g_{jm'i} - g_{ij'm} = 2\Gamma^k_{ij} g_{km}$
אנו רוצים לקבל את Γ ולכן נכפיל במטריצה ההופכית g_{km} שהיא g^{km}
$g^{nm}(g_{mi'j} + g_{jm'i} - g_{ij'm}) = 2\Gamma^k_{ij} \delta^n_u$
$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{km}(g_{mi'j} + g_{jm'i} - g_{ij'k})$
וזוהי נוסחה לחישוב מקדמי כריסטופל.

הרצאה 9

תזכורת משיעור שעבר

סמנו $j_{ij,k}$ את הנגזרת לפי k של האיבר הij בG (התבנית היסודית הראשונה)
מצאנו את מקדמי כריסטופל שמקיימים את המשוואה
$\Gamma_{ij}^{k}=\frac{1}{2}g^{km}(g_{mi.j}+g_{jm,i}-g_{ij,m})$
כאשר כאן אנו עובדים לפי הסכם הסכימה של איינשטין (ז"א יש פה סכימה כי יש אינדקס עליון ואינדקס תחתון על m)
למעשה, רשומות המשוואות הבאות:
$\Gamma_{11}^{1}\overset{i=j=k=1}{=}\frac{1}{2}g^{1m}(g_{m1,1}+g_{1m,1}-g_{11,m})$
ולפי הסכם הסכימה של איינשטין
$=\frac{1}{2}g^{11}(g_{11,1}+g_{11,1}-g_{11,1})+\frac{1}{2}g^{12}(g_{21,1}+g_{12,1}-g_{11,2})=\frac{1}{2}(g^{11}g_{11,1}+(2g_{12,1}-g_{11,2})g^{12})$

חישוב מקדמי כריסטופל עבור מטריצה אלכסונית

נשם לב שאם המטריצה G אלכסונית
(1) $\Gamma_{11}^{1}=\frac{1}{2}g^{11}g_{11,1}=\frac{1}{2}\frac{g_{11,1}}{g_{11}}$
באופן דומה עבור מטריצה אלכסונית אפשר לקבל את כל המקדמים הבאים:
(2)$\Gamma_{11}^{2}=-\frac{g_{11,2}}{2g_{22}}$
(3) $\Gamma_{12}^{1}=\frac{g_{11,2}}{2g_{11}}$
(4) $\Gamma_{12}^{2}=\frac{g_{22,1}}{2g_{22}}$
(5) $\Gamma_{22}^{1}=-\frac{g_{22,1}}{2g_{11}}$
(6) $\Gamma_{22}^{2}=\frac{g_{22,2}}{2g_{22}}$

גאומטריה פנימית של משטח

בהנתן דף נייר שגלגלנו אותו, ניתן לקבל גליל. אם הייתה עקומה על הדף אז אורכה על הדף שווה לאורכה על הגליל. ברור שהגדרה זו לא תמיד תהיה אפשרית ללא עיוות של הדף (חשבו על מסטיק שציירנו עליו עקומה ולאחר מכן להדביק אותו על ספירה).

באופן כללי, בהנתן שני משטחים רגולרים, M_1, M_2 והתאמה חח"ע בין נקודותיהם, כך שעקום כלשהו שווה לאורכה של התמונה שלו γ_2 על M_2 (במקרה שלנו של הגליל, נשמר האורך כי לא מתחנו את הנייר)

הגדרה 0.1 יהיו M_1 וM_2 משטחים רגולרים ו$\varphi : M_1 \to M_2$. דיפיאומורפיזם (הכוונה להעתקה חח"ע ועל רציפה והעתקה f^{-1} חלקה). f נקראת **כיפוף** או **איזומטריה רימנית** אם אורך של עקום כלשהו $\gamma_1 : [a,b] \to M_1$ שווה לאורכו של התמונה שלה $\gamma_2 = \rho \circ \gamma_1 : [a,b] \to M_2$

תכונות של משטחים הנשמרות תחת כיפוף נקראות **גאומטריה פנימית של משטח**.

כלומר, תכונות אלה אינן תלויות בצורה שבה המשטח משוכן במרחב האוקלידי. נהוג לתאר זאת: נמלה שיכולה לנוע לאורך משטח, למדוד אורכים של עקומות וזוויות אך אינה יכולה לראות את המרחב סביב המשטח.

משפט 0.2 יהי $\varphi : M_1 \to M_2$ דיפיאומורפיזם ופרמטריזציות רגולריות $r : U \to M_1 \subset \mathbb{R}^3$ $t : W \to M_2$ מתקבלת העקומה בין תחומי הפרמטרים

$$\psi = t^{-1} \circ \varphi \circ r : U \to W$$

הדיפיאומורפיזם הינו איזומטריה רימנית $\Leftrightarrow$ לכל נקודה $a \in V$ הדיפרנציאל $d\psi_a : T_aU \to T_bW$ (כאשר $b = \psi_a$) שומר את התבנית היסודית הראשונה, כלומר

$$I_a(x,y) = \tilde{I}_b(d\psi_a(x), d\psi_a(y))$$

מסקנה 0.3 בין שני משטחים נתונים קיימת איזומטריה רימנית $\Leftrightarrow$ לאחר החלפת משתנים מתאימה, התבניות היסודית הראשונות של המשטחים זהות.

מסקנה 0.4 גאומטריה פנימית כוללת את כל התכונות הגאומטריות של משטחים התלויות בתבנית יסודית ראשונה בלבד

הערה 0.5 הבעיה הפרקטית של מפות גאוגרפיות היא שהביאה לפיתוח התאוריה של גאומטריה פנימית. במקרה שלנו, כל מפה גאוגרפית היא למעשה פרמטריזציה של תחום על כדור הארץ. מפה אידיאלית תהיה מפה שאורך כל עקום על המפה שווה לאורך עקום על פני כדור הארץ (או פרופורציונלי לו). מפה אידיאלית שכזו קיימת אמ"מ קיימת פרמטריזציה חלקה של הספירה S^2, כך שבה התבנית היסודית הראשונה $g_{ij} = c\delta_{ij} = \begin{cases} c & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$ כאשר c קבוע, נראה (וראינו באנפי 4, מי שהיה בהרצאות, או שלא) שמפה כזו אינה קיימת.

קו גאודזי

הכללה של קו ישר למרחבים כלליים.

הגדרה 0.6 ניתן להגדיר קו גאודזי בשתי דרכים שקולות:

1. מינימום לוקלי של מרחק בין שתי נקודות.
2. המשיק בכל נקודה מקביל, במובן שההיטל של המשיק על המישור המשיק בנקודה קרובה שווה להיטל עצמו.

כלומר: בהנתן עקומה γ על מפה $\gamma(t) : \mathbb{R}^3 \to U$
המיפוי של המשטח $\delta(u) : U \to M$ (מיפוי של המפה למציאות) $\delta(\gamma(t))$ אומר לנו איפה העקומה נמצאת בכל זמן נתון t ולכן $\frac{d\delta}{dt} \in T_a M$ (וקטור המהירות).
כדי שהעקומה γ תהיה גיאודזית, $\frac{d}{dt}(\frac{d\delta}{dt}) \perp T_A M$ (7)
נראה ש(7) מתקיים:
ע"פ ההגדרה השנייה מבקשים שבשתי נקודות קרובות ההיטל דל המשיק על המישור יהיה דווה
$\delta'(\gamma(t+\Delta t)|_{T_A M} = \delta'(\gamma(t))|_{T_A M}$ ולכן
$\delta'(\gamma(t+\Delta t)|_{T_A M} - \delta'(\gamma(t))|_{T_A M} = 0$
ולכן
$\frac{\delta'(\gamma(t+\Delta t)|_{T_A M} = \delta'(\gamma(t))|_{T_A M}}{\Delta t}|_{T_A M} = 0$
נשאיף לאפס ונקבל
$\delta''(\gamma(t))|_{T_A M} = 0$
הטלה של מישור מגדירה מכפלה פנימית ולכן
$< \delta''(\gamma(t)), T_A M >= 0$
$\delta''(\gamma(t)) \perp T_A M$
ולכן אכן משוואה (7) עובדת שהיא
$\frac{d}{dt}(\frac{d\delta}{dt}) \perp T_A M$
נסמן ב$T_A M$ בV
$\frac{dV}{dt} \perp V$
$< \frac{dV}{dt}, V >= 0$
$\frac{d||V||^2}{dt} = \frac{d}{dt} < V, V >=< \frac{dV}{dt}, V > + < V, \frac{dV}{dt} >= 0$
הנגזרת של עקומה במרחב
נסמן מעתה נגזרת של γ לפי t כ$\dot{\gamma}$
$\frac{d\delta(\gamma(t))}{dt} = \sum_i \frac{d\delta}{2u^i} \cdot \frac{d\gamma^i}{dt} \overset{\text{Einstein}}{=} \sum_i \delta_{,i}(\gamma(t))\dot{\gamma}^i$
ואז נגזור פעם נוספת:
$\frac{d}{dt}\frac{d\delta}{dt} = \sum_i \delta\prime_i(\gamma(t))\ddot{\gamma}^i + \frac{d}{dt}\delta_{,i}(\gamma(t))\dot{\gamma}^i = \sum_i \delta\prime_i(\gamma(t))\ddot{\gamma}^i + \sum_i(\sum_j \delta\prime_{ij}\dot{\gamma}^j)\dot{\gamma}^i$
מסימני כריסטופל ראינו
$\delta\prime_{ij} = \Gamma^k_{ij}\delta\prime_k + b_{ij}\hat{n} = \sum_i \delta_{,i}\ddot{\gamma}^i + \sum_k\sum_i\sum_j \delta_{,k}\Gamma^k_{ij}\dot{\gamma}^i\dot{\gamma}^j$+(משהו שניצב ל$\hat{n}$) $\hat{n}$

ולכן הקו הגאודזי המבוקש
$0 = \sum_k \delta_{,k}\ddot{\gamma}^k + \sum\sum\sum \delta_{,k}\Gamma^k_{ij}\dot{\gamma}^i\gamma^j$

משפט 0.7 γ עקומה גיאודזית $\Leftrightarrow$ מקיימת את מערכת המשוואות $\ddot{\gamma}^k + \Gamma^k_{ij}\dot{\gamma}^i\dot{\gamma}^j = 0$

דוגמא

נמצא את הקווים הגאודזים של חרוט. $\delta(\phi, z) = \begin{pmatrix} Rz\cos\phi \\ Rz\sin\phi \\ z \end{pmatrix}$

תחילה נמצא את היעקוביאן $d\delta = \begin{pmatrix} -Rz\sin\phi & R\cos\phi \\ Rz\cos\phi & R\sin\phi \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$G = d\delta^t d\delta = \begin{pmatrix} R^2z^2 & 0 \\ 0 & R^2+1 \end{pmatrix}$

קל לראות $g_{11} = R^2z^2$ $g_{12} = g_{21} = 0$

$g_{22} = R^2 + 1$

ברור שהמטריצה היא אלכסונית ולכן ניתן לחשבה דרך נוסחאות (1)-(6)

$g_{11,1} = 0$ $g_{11,2} = 2R^2z$ $g_{22,1} = g_{22,2} = 0$

נציב בנוסחה של מטריצה אלכסונית

$\Gamma^1_{11} = 0$ $\Gamma^1_{12} = \frac{1}{z}$ $\Gamma^2_{11} = -\frac{R^2}{1+R^2z}$ $\Gamma^2_{22} = 0$ (9)

כדי שהעקומה תהיה גאודזית צריך להתקיים (בסמני איינשטין)

$\ddot{\gamma}^k + \Gamma^k_{ij}\dot{\gamma}^i\dot{\gamma}^j = 0$

עבור $k = 1, 2$

נציב $k = 1$ $\ddot{\gamma}^1 + \Gamma^1_{ij}\dot{\gamma}^i\dot{\gamma}^j = 0$

ולפי איינשטין

$\ddot{\gamma}^1 + \sum_i\sum_j \Gamma^1_{ij}\dot{\gamma}^i\dot{\gamma}^j = 0$

$\ddot{\gamma}^1 + \Gamma^1_{11}\dot{\gamma}^1\dot{\gamma}^1 + 2\Gamma^1_{12}\dot{\gamma}^1\dot{\gamma}^2 + \Gamma^1_{22}\dot{\gamma}^2\dot{\gamma}^2 = 0$

ולפי משוואות (9)

$\ddot{\gamma}^1 + \frac{2}{z}\dot{\gamma}^1\dot{\gamma}^1 = 0$

הגדרנו $\delta(\phi, z)$ לכן $\gamma_1 = \phi$ $\gamma_2 = z$

$\ddot{\phi} + \frac{2}{z}\dot{\phi}\dot{\phi}^1 = 0$

באופן דומה עושים עבור $k = 2$

$\ddot{z} - \frac{R^2}{1+R^2}\ddot{\phi}^2 = 0$

צריך לקבוע את ϕ ו-z. נניח $||\dot{\gamma}|| = 1$

הנורמה כאן צריכה להיות לפי המטריקה

$(\dot{\phi}\dot{z})\begin{pmatrix} R^2z^2 & 0 \\ 0 & R^2+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = 1$ (כי פרמטריזציה טבעית ותבנית יסודית ראשונה)

$\dot{\phi}^2R^2z^2 + \dot{z}^2(1+R^2) = 1$ (10)

לפי המקרה של $k = 1$

$$\ddot{\phi} + 2 \cdot \frac{1}{z}\dot{\phi}\dot{z} = 0$$
$$\frac{\ddot{\phi}}{\dot{\phi}} = -2\frac{\dot{z}}{z}$$
$$\ln \dot{\phi} = -2\ln z + \ln A$$
$$\phi' = \frac{A}{z^2}$$
נציב את ϕ' ב(10)
$$1 = R^2 z^2 (\frac{A}{z^2})^2 + (1+R^2)\dot{z}^2 = 1$$
אפשר לפרש במשוואה זו את $\dot{z}$
$$\frac{dz}{dt} = \frac{\sqrt{R^2 - R^2 A^2}}{z\sqrt{1+R^2}}$$
נעביר אגפים ונסדר
$$z = \sqrt{\frac{(t-b)^2}{(1+R^2)} + R^2 A^2}$$
$$\dot{\phi} = \frac{A}{z^2} = \frac{1}{R^2 A} \cdot \frac{1}{A + \left(\frac{t-b}{AR\sqrt{1+R^2}}\right)^2}$$
ונקבל ש
$$\phi = \sqrt{1 + \frac{1}{R^2}} \arctan\left(\frac{t-b}{AR\sqrt{1+R^2}}\right) + c$$
ולכן סך הכל
$$\begin{pmatrix} \phi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{1 + \frac{1}{R^2}} \arctan\left(\frac{t-b}{AR\sqrt{1+R^2}}\right) + c \\ \sqrt{\frac{(t-b)^2}{(1+R^2)} + R^2 A^2} \end{pmatrix}$$

הרצאה 10

תזכורת

בשיעור שעבר הגדרנו מהו קו גיאודזי בשתי דרכים שונות

1. מינימום לוקאלי של מרחק בין שתי נקודות
2. $\frac{d}{dt}(\frac{d\delta}{dt}) \perp T_A M$

ראינו שמ(2) ניתן להגיע למשוואה למציאת קו גיאודזי באמצעות סימני כריסטופל. היום נראה שגם תנאי (1) מקיים משוואה זו.

למשל

אם נסתכל על גליל, הקוים הגיאודזים שלנו הם קווי בורג.

מדוע? ראינו שתכונה של עקום להיות קו גאודזי תלויה רק בתבנית היסודית הראשונה ולכן היא אינוריאנטית תחת כיפוף. במקרה של הגליל אפשר לפרוס אותו לדף, וכאשר נעשה זאת הקו הגיאודזי הוא למעשה קו ישר.

משפט 0.1 עקומה γ עם עקמומיות שונה מאפס על משטח היא גיאודזית $\Leftrightarrow$ הנורמל לעקומה מקביל לנורמל למשטח בכל נקודה.

שימו לב עקומה עם עקמומיות אפס היא תמיד גיאודזית.

דוגמא נוספת

אם נסתכל על ספירה בהנתן נקודה $A \in S^2$ ווקטור משיק $x \in T_A S^2$ נעביר מישור משיק דרך A. המישור חותך (כאילו משיק) את הספירה, אם נלך לאורך המעגל הגדול המהירות היא קבועה ווקטור התאוצה הוא תמיד מכוון למרכז הספירה, ולכן הקוים הגיאודזים הם המעגלים הגדלים.

לגבי הקריטריון לגבי אורך עקומה מינימלי:

חשבון וריאציות ומשוואות אוילר

בהנתן משטח M ושתי נקודות עליו $A,B\in M$, יש למצוא עקום C המחבר את נקודות A ו-B כך שהמרחק יהיה מינימלי.

שימו לב העקום הקצר הזה לא בהכרח קיים, ייתכן וקיימת נקודה סנגולרית (ולכל מסלול המרחק יהיה אינסופי).

כדי להגדיר אורך, מצופה שנפנה לתבנית היסודית הראשונה.

הגדרה 0.2 יהיה $U\subset\mathbb{R}^n$ תחום במרחב n מימדי, נניח שנתונה פונקציה חלקה $L(u,u'):=L(u_1,..,u_n,u'_1,..,u'_n)$. $u=(u_1,..,u_n)$ $u'=(u'_1,..u'_n)$.

ישנם $2n$ משתנים, המשתנים u'_i נחשבים משתנים חדשים בלתי תלויים. פונקציה L נקראת לגראנזיאן.

ברור שההגדרה $S(\gamma)=\int_a^b L(u_1,..,u_n,u'_1,..,u'_n)$ יכולה להוביל לאורך העקומה כאשר

$\gamma(\theta)=(u_1(\theta),..,u_n(\theta))$. נרצה למצוא עקום γ ששייך למשטח כך שהאורך של הפונקציונל $S(\gamma)$ מינימלי.

למת אוילר

תהי פונקציה $f:[a.b]\to\mathbb{R}$ רציפה, נניח שמתקיים $\int_a^b f(\theta)g(\theta)d\theta=0$ עבור כל פונקציה חלקה $g(\theta)\in C^\infty$ המקיימת $g(a)=g(b)=0$ אז $f(\theta)\equiv 0$. **הוכחה:** מתבססת על בחירת g ספציפית

$$g(\theta)=\begin{cases}e^{\frac{1}{\xi-\theta}+\frac{1}{\theta-\xi_2}} & \theta\in(\xi_1,\xi_2)\\ 0 & else\end{cases}$$ ■

משפט אוילר אם העקום $\gamma:[a,b]\to U$ מביא את הפוקנציונל $S:M\to\mathbb{R}$ לאקסטרום, אז העקום

$\gamma(\theta)=(u_1(\theta),..,u_n(\theta))$ מקיים את המערכת משוואות הבאה:

$$\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial u_i}-\frac{d}{d\theta}(\frac{dL}{du'_i})=0\\ \gamma(a)=A\\ \gamma(b)=B\end{cases} \quad (3)$$

ברור שאם בוחרים את הלגראנזיאן באופן הבא:

$L(\gamma,\gamma')=\sum_{i,j=1}^n g_{ij}u'_iu'_j$ אז ברור שהלגראנזיאן הנ"ל בתחום מוביל לאורך עקומה:

$$S(\gamma)=\int_a^b L(\gamma,\gamma')d\theta$$

זוהי פונקציה של אורך עקומים. אנו מחפשים את העקום הקצר ביותר שיוביל אותנו לקו גיאודזי. מסתבר שהעקום הקצר ביותר מקיים את משוואת אוילר עבור לגרנזיאן אנו

מאמינים שמשוואת הקוים הגיאודזים ע"י סימני כריסטופל צריכים להתקיים גם במקרה זה.

אם רוצים מינימיזציה על אורך העקומה נצטרך לחשב נגזרות חלקיות (אופן דומה לאנפי 3)

$\frac{\partial L}{\partial u_k} = \frac{1}{2L}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{2g_{ij}}{2u_k} u_i' u_j'$ (4). שימו לב כי u, u' בלתי תלויות

$\frac{\partial L}{\partial u_k'} = \frac{1}{L}\sum_{i,j=1}^{n} g_{ik} u_i'$ (5)

מטרתנו להציב במשוואת אוילר (3) כדי "לגלות" את העקום. נשאר למצוא

$\frac{d}{d\theta}(\frac{\partial L}{\partial u_k'}) = \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{n}(g_{ik}u_i'' + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{2g_{ij}}{2u_k} u_i' u_j')$ (6)

אם נציב את (4) (5) ו(6) ב(3) נקבל

$$\sum_{i,j=1}^{n} g_{ik}u_i'' + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}(\frac{2g_{ik}}{2u_j} + \frac{2g_{jk}}{2u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k})u_i' u_k' = 0$$

תזכורת

ראינו שמשוואת הקו הגיאודזי $\ddot{\gamma}^k + \sum\sum \Gamma_{ij}^k \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j = 0$ וראינו $\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}g^{km}(g_{mi.j} + g_{jm,i} - g_{ij,m})$ ולכן אם נכפול במטריצה ההפוכה של g_{ik} אנו מגיעים

$$\ddot{\gamma}^k + \Gamma_{ij}^k \dot{\gamma}_i \dot{\gamma}_j = 0$$

ולכן, אכן המסלול הקצר ביותר הוא קו גיאודזי.

חזרה על כמה נושאים

דיפרנציאל

$f : U \to W$ העתקה חלקה, עבור כל נקודה $a \in U$ העתקה f מגדירה העתקה ליניארית $df_a : T_aU \to T_{f(a)}W$ של מרחבים משיקים.

יהי $u(\theta) \in U$ כאשר $\theta \in (-\epsilon, \epsilon)$ עקום חלק בU העובר בנקודה $a \in U$ כלומר $u(0) = 0$ אז $f(u(\theta))$ מהווה עקום בתחום W העובר בנקודה $f(u(0)) = f(a)$.
עקום $u(\theta)$ מגדיר וקטור מהירות
$x = \frac{d}{d\theta}u(\theta)|_{\theta=0} = (u'_1(0), .., u'_n(0)) \in T_aU$
ואז וקטור המהירות של העקום $f(u(\theta))$ הא $y = \frac{d}{d\theta}f(u(\theta))|_{\theta=0} \in T_{f(a)}W$.

הגדרה 0.3 דיפרנציאל df_a מוגדר כהעתקה $y = df_a(x) = \frac{d}{d\theta}f(u(\theta))|_{\theta=0}$ שמהווה וקטור והקוארדינטה הi שלו שווה ל $\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial u_j} \cdot u'_j(0)$ ז"א הדיפרנציאל $df_a(x)$ שווה לוקטור $y = (w'_1(0), .., w'_n(0))$ ואפשר לרשום אותו במשוואה הבאה:

רושמים
$$\begin{pmatrix} w'_1(0) \\ . \\ . \\ w'_n(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_n} \\ & \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \frac{\partial f_n}{\partial u_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'_1(0) \\ . \\ . \\ u'_n(0) \end{pmatrix}$$

וקטור המהירות y תלוי רק בוקטור המהירות x ואינו תלוי בבחירה של העקום $u(\theta)$
.

שדה וקטורי

שדה וקטורי בתחום $U \subset \mathbb{R}^n$ מוגדר כפונקציה, אם לכל נקודה $a \in U$ מתאימה וקטור משיק $X(a) \in T_a(u)$.

$\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ פונקציה וX שדה וקטורי בU, אז $\varphi \cdot X$ מהווה אף הוא שדה וקטורי
$a \to \varphi(a) \cdot X(a) \in T_aU$
כל שדה וקטורי X ניתן להציג באופן יחיד כקומבינציה ליניארית
$X = \sum_{i=1}^n \varphi_i x_i$ כאשר x_i וקטורי הבסיס וφ_i פונקציות סקלריות.

הגדרה 0.4 בהנתן שדה וקטורי $V : a \in M \to T_aM$. העקומה $\gamma(t)$ נקראת קו אינטגרלי של שדה וקטורי אם $\gamma'(t) = V(\gamma(t))$.
$$(\gamma^1)' = V^1(\gamma^1, .., \gamma^n)$$
.
.
$$(\gamma^n)' = V^n(\gamma^1, .., \gamma^n)$$

נגזרת לי

נגזרת לי של פונקציה $f: M \to \mathbb{R}$ לפי השדה הוקטורי $V \in T_pM$ מודדת את שינוי הפונקציה בכיוון V .

מסמנים $L_V f := \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = df(v) = f_{,i} V^i$ (סמני איינשטין)

כאשר γ היא עקומה אנטגרלית המקיימת

$\gamma(0) = V \ \gamma'(0) = p$

מסתבר שנגזרת לי היא ליניארית בשדה

$L_{av+bw} f = aL_v f + bL_w f$

כאשר v, w שדות וקטורים $a, b \in \mathbb{R}$

כמו כן **נגזרת לי** ליניארית בf

$L_v(f+g) = L_v f + L_v g$

קל להסיק

$L_v(fg) = (fg)_{,i} v^i = g \cdot f_{,i} v^i + f \cdot g_{,i} v^i = gL_v f + fL_v g$

נשם לב שאם נפעיל זאת על בסיס יחידה

$L_{e_i} f = f_{,j} (e_i)^j = f_{,j} \delta^j_{,} = f_{,i}$

קומטטור/סוגר לי

יהיו V, W שדות וקטורים. הקומטטור $[V, W]$ מוגדר להיות

$L_{[V,W]} = [L_V, L_W] = L_V L_W - L_W L_V$

ולכן מתקיים השוויון הבא:

$L_{[V,W]} f = L_V L_W f - L_W L_V f = L_V (L_W f) - L_W (L_V f) = L_V (f_{,i} W^i) - L_W (f_{,i} V^i) = W^i L_V f_{,i} - V^i L_W f_{'i}$

קל להסיק

$L_V(fg) = (fg)_{,i} V^i = gf_{,i} V^i + fg_{,i} + V^i = gL_V f + fL_V g$

$L_{[v,w]} f = L_V L_W f - L_W L_V f = L_V (f_{,i} W^i + f_{,i} L_V W^i - (V^i L_W f_{,ij} W^j + f_{,i} L_w V^j) = f_{,i} (W^i_{,j} V^j - V^i_{,j} W^j)$

$[V, W] = w^i_{,j} V^j - V^i_{,j} W^j$

הרצאה 11

שיעור שעבר הגדרנו קומוטטור וראינו $[v,w]^j = w^i_{\prime j} v^j - v^i_{\prime j} w^j$

המשמעות הגאומטרית

אם הקומוטטור של שני מסלולים היא אפס אז המסלולים מגיעים לאותה נקודה.

תכונות הקומוטטור

1. אנטי סמטרי: $[v,w] = -[w,v]$
2. מקיים את זהות יעקובי: $[[u.v].w] + [[v,w],u] + [[w,u],v]] = 0$

תזכורת־ גרדיאנט

ניתן להגדיר ע"פ נגזרת לי: לכל $w \in T_pM$

$L_w f = df(w) =< \nabla f, w >$

אם $w = w^i e_i$ כאשר $e_i = r_{\prime i}$

אז ניתן לרשום

$df(w) = J_f(w) = (f_{\prime 1}, .., f_{\prime n})w$

נשם לב

$< \nabla f, w >= g_{ij} (\nabla f)^i \cdot w^j$

ואז אם נכפיל במטריצה ההפוכה

$g^{ji} f_{\prime k} w^k = (\nabla f)^i w^j$

$(\nabla f)^i = g^{ij} f_{\prime j}$

למשל

אם $f(x,y,z) = z$ על ספרת היחידה. ברור שהפרמטריזציה במקרה זה $r = \begin{pmatrix} \cos\varphi \sin\theta \\ \sin\varphi \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$

קל לחשב את התבנית היסודית הראשונה (עשינו זאת כבר שיעורים קודמים)

$$g^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sin^2\theta} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\ g=\begin{pmatrix}\sin^2\theta & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

ואז ברור ע"פ הגדרת r

$$f(\varphi,\theta)=\cos\theta$$

$$\nabla f=g^{-1}df=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sin^2\theta} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{df}{d\varphi}\\ \frac{df}{d\theta}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sin^2\theta} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ -\sin\theta\end{pmatrix}$$

תזכורת־ נגזרת לי

שיעור שעבר הגדאנו נגזרת לי

$$L_vf=f_{'i}v^i$$

למשל

אז $f(x,y)=x^2$ והשדה הוקטורי $\vec{v}$ מוגדר ע"י $\vec{v}=x^2\hat{i}+2y^2\hat{j}$

ברור ש

$$v(x,y)=(x^2,2y^2)\in T_{(x,y)}\mathbb{R}^2$$

ואז נגזרת לי

$$L_v(x,y)(f)=x^2\frac{\partial f}{\partial x}+2y^2\frac{\partial f}{\partial y}=x^2(2x)+2y^2(0)$$

תרגיל

מצאו את הקומוטטור $[v,w]$ עבור השדות $v(u)=Au$ $w(u)=Bu$

כאשר A וB מטריצות קבועות.

נסמן $B=B^i_j$ $A=A^i_j$

המספר במקום הi בווקטור Au הוא תוצאת הככפלה של השואה הi במטריצה A עם הוקטור u, ובאופן דומה עבור B ולכן רושמים

$$v^i=(Au)^i=A^i_ku^k$$

ובאופן דומה עבור B

$$w^i=(Bu)^i=B^i_ku^k$$

ראינו שיעור שעבר באופן כללי

$$[v,w]^i=w^i_{'j}v^j-v^i_{'j}w^j$$

ולכן יש לחשב מהו $v^i_{'j}$ ומהו $w^i_{'j}$

$$v^i_{'j}=(A^i_ku^k)_{ij}=A^i_ku^k_{'j}=A^i_k\delta^k_j=A^i_j \quad (2)$$

באופן דומה מקבלים עבור

$$w^i_{'j}=B^i_j \quad (3)$$

ולכן

$$[v,w]^i=B^i_jv^i-A^i_jw^j$$

ובאופן כללי

$$[v,w](u)=Bv(u)-Aw(u)=(BA-AB)\cdot u=[B,A]\cdot u.$$

נגזרת קו־וריאנטית

נגזרת של שדה סקלרי בכיוון הקורדינטה אפשר לחשב ע"י
$f_{'j} = \frac{df}{du_j}$ נגזרת קו־וריאנטית היא העתקה חלקה המקיימת עבור שדות וקטורים u, v, w ופונקציה f את התכונות הבאות:

1. $\nabla_{au+bw}(u) = a\nabla_v u + b\nabla_w v$, $\nabla_u(au+bw) = a\nabla_u v + b\nabla_u w$
2. $\nabla f_u v = f\nabla_u v$
3. כלל לייבניץ $\nabla_u(f_v) = f\nabla_u + (L_u f)v$

ראינו לפני שני שיעורים

$$\nabla_{e_i} e^j = \Gamma_{ij}^k e_k$$

ובאופן כללי

$$r_{j'i} = \Gamma_{ij}^k r_k + b_{ij}\hat{n}$$

$$\nabla_u v = \nabla_{w^i e_i}(v^j e_i) \overset{Lievnits}{=} (L_{w^i e_i} v^j)e^j + v^j \nabla_{w^i e_i} e_j = w^i v^j_{'i} e_j + v^j w^i \Gamma_{ij}^k e_k$$

בסה"כ מקבלים

$$(\nabla_{e_i})^m = v^m_{'i} + \Gamma_{ij}^m v^j$$

נהוג לסמן את הנגזרות הקו־וריאנטיות

$$v^m_{;j}$$

ורושמים

$$v^m_{'j} = v^m_{'j} + \Gamma_{ij}^m + \Gamma_{ij}^m v$$

משפט אגרגיום (המשפט הנפלא של גאוס)

ראינו שאופרטור הצורה מוגדר ע"י $S = G^{-1}B$

והגדרנו עקמומיות גאוס

$K = \kappa_1 \kappa_2 = \det(S) = \frac{\det(B)}{\det(G)}$

כביכול עקמומיות גאוס תלויה באיך העקומה הוכנסה ל$\mathbb{R}^3$

גאוס למעשה גילה שכדי לחשב עקמומיות גאוס כל מה שצריך זה את המטריקה.

למשל

גם ממדידות על כדור הארץ אפשר להסיק שכדור הארץ הוא כדור (כלומר בעל עקמומיות קבועה).

משפט זה אומר שעקמומיות גאוס היא תכונה פנימית בניגוד לערכי העקמומיות הראשיים ולעקמומיות הממוצעת.

משפט 0.1 עקמומיות גאוס ניתנת לביטוי בעזרת רכיבי התבנית היסודית הראשונה **בלבד.**

הוכחה: $K = \frac{\det B}{\det G} = \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}{\det G}$

את b_{ij} אנו מוצאים ע"י התבנית היסודית השמחחה $< r_{ij}, \hat{n} >$ שזה בדיוק כמו מכפלה משולשת.

ולכן אפשר לרשום $b_{ij} = \frac{\det((r_i),(r_i),(r_k))}{\sqrt{\det G}}$

ולכן נרשום

$$K = \frac{1}{(\det(G))^2}((r_{11},r_1,r_2)(r_{22},r_1,r_2) - (r_{12},r_1,r_2)^2) = \frac{1}{(\det G))^2}(\det\begin{pmatrix} r_{11} \\ r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} \det\begin{pmatrix} r_{22} \\ r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} -$$

$$\det\begin{pmatrix} r_{12} \\ r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}^2) = \frac{1}{(\det G))^2}(\det\begin{pmatrix} r_{11} \\ r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} \det\begin{pmatrix} r_{22} \\ r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}^t - \det\begin{pmatrix} r_{12} \\ r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_{12} \\ r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}^t) =$$

$$= \frac{1}{(\det G))^2}\left(\det\begin{pmatrix} < r_{11}, r_{11} > & < r_{11}, r_1 > & < r_{11}, r_2 > \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ < r_2, r_{12} > & < r_2, r_1 > & < r_2, r_2 > \end{pmatrix}\right) - \det\begin{pmatrix} < r_{11}, r_{11} > & < r_{11}, r_1 > & < r_{11}, r_2 > \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ < r_2, r_{12} > & < r_2, r_1 > & < r_2, r_2 > \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{(\det G))^2}[\det\begin{pmatrix} < r_{11}, r_{11} > & < r_{11}, r_1 > & < r_{11}, r_2 > \\ 0 & g_{11} & g_{12} \\ 0 & g_{12} & g_{22} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 0 & < r_{11}, r_2 > & < r_{11}, r_2 > \\ < r_1, r_{22} > & g_{11} & g_{12} \\ < r_2, r_{22} > & g_{12} & g_{22} \end{pmatrix}$$

$$- \det\begin{pmatrix} < r_{12}, r_{12} > & < r_{12}, r_1 > & < r_{12}, r > \\ 0 & g_{11} & g_{12} \\ 0 & g_{12} & g_{22} \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} 0 & < r_{12}, r_1 > & < r_{12}, r_2 > \\ < r_1, r_{12} > & g_{11} & g_{12} \\ < r_2, r_{12} > & g_{12} & g_{22} \end{pmatrix}]$$

נגדיר $\Gamma_{ij'k} =< r_{ij}, r_j >$ ■

1. $\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} = \frac{\partial}{\partial u^k}(< r_i, r_j >) =< r_{ik}, r_j > + < r_i, r_{jk} >$
2. $\frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} = \frac{\partial}{\partial u^i}(< r_j, r_k >) =< r_{ji}, r_k > + < r_j, r_{ki} >$
3. $\frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j} = \frac{\partial}{\partial u^j}(< r_k, r_i >) =< r_{kj}, r_i > + < r_{kj}, r_i > +c$

נחבר את 2 ו3 ונחבר

$$\partial < r_{ij}, r_k >= \frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}$$

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2}\left(g_{ki'j} + g_{jk'i} - g_{ij'k}\right)$$

ולכן ניתן לרשום

$$\frac{\partial}{\partial u^2} = \frac{\partial}{\partial u^2} =< r_{11}, r_2 > + < r_{12}, r_{12} <$$

בסה"כ נרשום

$$< r_{12}, r_{22} > - < r_{12}, r_{12} >= \frac{\partial}{\partial u^2}\Gamma_{112} - \frac{\partial}{\partial u_1}\Gamma_{122}$$

ובסך הכל

$$K = \frac{1}{\det(G)}\left(\frac{\partial}{\partial u^2}\Gamma_{112} - \frac{\partial}{\partial u^1}\Gamma_{122}\right) + \frac{1}{(\det G)^2}\left(\det\begin{pmatrix} 0 & \Gamma_{111} & \Gamma_{112} \\ \Gamma_{221} & g_{11} & g_{12} \\ \Gamma_{122} & g_{12} & g_{22}\end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} 0 & \Gamma_{121} & \Gamma_{122} \\ \Gamma_{221} & g_{11} & g_{12} \\ \Gamma_{122} & g_{12} & g_{22}\end{pmatrix}\right)$$

מסקנה 0.2 אופרטור הצורה הוא תכונה חיצונית, אבל עקמומיות גאוס (למרות שהיא נגזרת מאופרטור הצורה היא תכונה פנימית)

משפט 0.3 עקמומיות גאוס ניתנת לביטוי באמצעות התבנית היסודית הראשונה ונגזרותיה בלבד.

מערכת קוארדינטות גאודזיות מקבילות

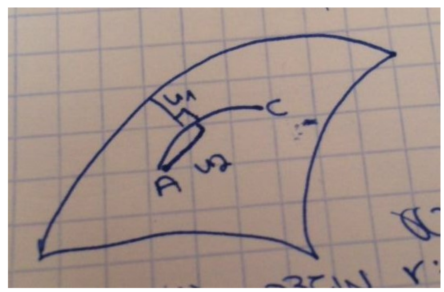
בהנתן משטח רגולרי $M \subset \mathbb{R}^3$ נקבע קו גאודזי C המתחיל בנקודה $A \in M$.

נסמן u_2 את העקומה הנתונה בפרמטריזציה טבעית לאורך עקום C הקיימת $C(u_2 = 0) = A$.

נסמן בL את האורך של C .

בהנתן זוג פרמטרים (u_1, u_2) כאשר $u_2 \in [0, L]$ ו$u_1 \in (-\epsilon, \epsilon)$. נגדיר נקודה $r(u_1, u_2) \in M$ באופן הבא.

ראשית נמצא את הנקודה על העקום C המרוחקת מA במרחק u_2



לאחר מכן ניקח ממנה קו גאודזי המאונך לC ונתקדם לאורכו למרחק $|u_1|$. את נקודת הסיום נסמן ב$r(u_1, u_2)$. הקוים הגיאודזים מוגדרים באופן מקומי ומקופמקטיות של הקטע $[0, L]$. נובע לעבור לϵ מספיק קטן ההעתקה

$r : U = (-\epsilon . \epsilon) \times [0, L] \to M$

ברור כי $||r_1|| = ||\frac{2r}{2u_1}|| = 1$

כמו כן r_1, r_2 מאונכים על C ומתקיים

$< r_1, r_2 > |_{u_1 = 0} = 0$

$\frac{\partial}{\partial u_1} < r_1, r_2 > + < r_1, r_{21} >$

r_{11} היא התאוצה של הקו הגאודזי ולכן הוא מאונך למישור המשיק $< r_{11}, r_2 >= 0$

$0 = \frac{\partial g_{11}}{\partial u_2} = \frac{\partial}{\partial u_2} < r_1, r_1 >= 2 < r_1, r_{12} >$

נשם לב כי $g_{11} = 1$ כי מכפילים וקטורים לאורך עקומה גיאודזית בפרמטריזציה טבעית. בסה"כ קיבלנו

$\frac{\partial}{\partial u_1} < r_1, r_2 >= 0$

$< r_1, r_2 >= 0$

כלומר, המשמעותשקוי הקורדינטות על המשטח מאונכים זה לזה.

כלומר על העקום C הוקטורים r_1 וr_2 ניצבים ולא מתאפסים ולכן עבור ϵ מספיק קטן וקטורים r_1 וr_2 בלתי לויים בU ולכן הפרמטריזציה רגולרית. מערכת שכזו נקראת מערכת קוארדינטות גאודזיות מקבילות.

הרצאה 12

תוספות

שיעור שעבר הגדרנו נגזרת קו וריאנטית שהיא מוגדרת להיות השדה הוקטורי המוטל על המישור המשיק. (r עקומה)

רשמנו:

$$\frac{dv}{du^k} = \frac{d}{du^k} v^i r_i = v^i{}_{,k} r_i + v^i(\Gamma^j_{ik} r_j) + v^i b_{ik}\hat{n}$$

כאשר האיבר האחרון מאונך למישור המשיק ולכן רשמנו

$$v^i_{;k} = v^i_{,k} + \Gamma^i_{kl} v^l$$

טנזור הפיתול

טנזור הפיתול מוגדר להיות מסדר $\binom{1}{2}$ באופן הבא

$$T(v,w) = \nabla_v w - \nabla_w v - [v,w]$$

ואם נחשב

$$T(e_i,e_j) = \nabla_{e_i} e_j - \nabla_{e_i} e_j - [e_i,e_j] = \Gamma^k_{ij} e_k - \Gamma^k_{ji} e_k$$

ולכן מקבלים

$$T^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji}$$

(כמה המשטח מתעקם לאורך עקומה).

בנוסף שיעור שעבר ראינו את משפט אגרגיות של גאוס שאומר שעקמומיות תלוייה רק בתנית היסודית הראשונה ולכן למעשה היא תכונה פנימית של משטח.

קיבלנו:

$$K = \frac{1}{\det G}\left(\frac{\partial}{\partial u_2}\Gamma_{11,2} - \frac{\partial}{\partial u_1}\Gamma_{12,2}\right) = +\frac{1}{(\det G)^2}\left[\det\begin{pmatrix} 0 & \Gamma_{11,1} & \Gamma_{11,2} \\ \Gamma_{22,1} & g_{11} & g_{12} \\ \Gamma_{22,2} & g_{21} & g_{22}\end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} 0 & \Gamma_{12,1} & \Gamma_{12,2} \\ \Gamma_{12,1} & g_{11} & g_{12} \\ \Gamma_{12,2} & g_{21} & g_{22}\end{pmatrix}\right] \tag{1}$$

נחשב את עקמומיות גאוס במקרה הפרטי כאשר נתונה המטריקה הרימנית $ds^2 = du_1^2 + \tilde{G} du_2^2$

קל להבין (או להגדיר) $g_{11} = 1$ $g_{12} = 0$ $g_{22} = \tilde{G}$

קל לחשב במקרה זה את מקדמי כריסטופל

$$\Gamma_{11,1} = 0$$

$\Gamma_{11,2}=0$
$\Gamma_{12,1}=0$
$\Gamma_{12,2}=\frac{1}{2}\tilde{G}_1$
כאשר $\tilde{G}_1$ מסמן $\frac{\partial \tilde{}}{\partial u_1}$
$\Gamma_{22,2}=\frac{1}{2}\tilde{G}_2$
$\tilde{G}_2$ מסמן $\frac{\partial \tilde{G}}{\partial u_2}$
ברור שמתקבל
$g=\det\tilde{G}=g_{11}g_{22}-g_{12}^2=\tilde{G}$
ואם נציב הכל בנוסחה 1 נקבל

$$K=\frac{1}{g}(-\frac{1}{2}G_{11})+\frac{1}{g^2}\left(\det\begin{pmatrix}0&0&0\\ \frac{-G_1}{2}&1&0\\ \frac{-G_2}{2}&0&g\end{pmatrix}-\det\begin{pmatrix}0&0&\frac{G_1}{2}\\ 0&1&0\\ \frac{G_1}{2}&0&g\end{pmatrix}\right)=-\frac{1}{2}\frac{G_{11}}{g}+\frac{1}{4}\frac{G_1}{G_2}$$

. $K=-\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial^2\sqrt{g}}{\partial u_1^2}$

בנוסף, שיעור שעבר הגדרנו קוארדינטות גאודזיות

תזכורת 1

הגדרנו $M \to [0,L] \times (-\epsilon,\epsilon) = r : U$ עבור $0 < \epsilon$ מספיק קטן ההעתקה נותנת פרמטריזציה רגולרית.
הגדרנו $r_1=\frac{\partial r}{\partial u_1}$ $r_2=\frac{\partial r}{\partial u_2}$

תזכורת 2 ־ איך מוגדרת העקומה r?

על העקום c (c הוא קו גאודזי) בחרנו נקודה המרוחקת מA במרחק u_2 ומהמרחק $|u_2|$ ירינו קו גאודזי שיסומן u_1 . את נקודת הסיום אנחנו מגדירים $r(u_1,u_2)$
מצאנו ש $0 =< r_1, r_2 >$, כלומר המשמעות שבחירת קוארדינטות אלו על המשטח מאונכות זו לזו.
כלומר, על העקום c וקטורים r_1,r_2 ניצבים ולא מתאפסים ולכן r_1,r_2 בת"ל.
$< r_1,r_2 > |_{u_1=0}$
למערכת קוארדינטות שכזו קוראים **קוארדינטות גאודזיות מקבילות**

מגדירים את התבנית היסודית הראשונה בקורדינטות גאודזיות מקבילות להיות $g_{11}=1$ $g_{12}=0$ $g_{22}=h$
כאשר g_{22} במשתנים של u_1 וu_2 ונרשום $G=\begin{pmatrix}1&0\\0&h\end{pmatrix}$. ברור שאם $h=1$ מקבלים מישור.
באופן כללי, $\det G=h$
אם נשארים על העקומה המקורית c ברור שG היא יחידה.

הערה חשובה

כדי להראות קיום של איזומטריה מקומיות בין שני משטחים מספיק להוכיח קיום של קורדינטות שבהן המטריקה הרימנית של שני המשטחים זהה.

מטריקה רימנית: $ds^2 = du_1^2 + Gdu_2^2$

כאשר $G = G(u_1, u_2)$ (הכל על פי הקורדינטות הגאודזיות המקבילות).

משפט 0.1 נניח שהמשטח הרגולרי M הנו בעל עקמומיות גאוס קבועה K אז

1. אם $K = 0$ המשטח M אזומטרי מקומית לחלק של המישור האוקלידי.
2. אם $K > 0$ המשטח M איזומטרי מקומי לחלק של ספירה בעלת רדיוס $\frac{1}{\sqrt{K}}$.
3. אם $K < 0$ המשטח M איזומטרי מקומית לחלק של פסדו ספירה בעלת פרמטר $a = -\frac{1}{\sqrt{K}}$

הוכחה: נוכיח רק את סעיף א'.

כדי להוכיח איזומטריה בין שני משטחים מספיק להוכיח קיום קיום של קוארדינטות שבהן המטריקה הרימנית זהה.

נניח נתון לנו קו גאודזי c כלשהו על M ונבנה קוארדינטות גאודזיות מקבילות על M בסביבת C.

המטריקה הרימנית היא $sd^2 = du_1^2 + Gdu_2^2$

ממשפט אגרגיות $K = -\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial^2\sqrt{g}}{\partial u_1^2}$.

בקוארדינטות מקבילות הגדרנו ע"פ המטריקה $g_{22}|_{u_1=0}$ $\frac{\partial g_{22}}{\partial u_1}|_{u_1=0} = 0$.

ע"פ הגדרת מטריקה $g = g_{22}$ ולכן קיבלנו משוואה דיפרנציאלית ליניארית מסדר שני (ויש לנו שני תנאי התחלה) עם מקדמים קבועים. אם $K = 0$ ו$g_{22} = 1$.

ולכן המטריקה שנקבל $ds^2 = du_1^2 + du_2^2$ שזו המטריקה האוקלידית והיא שקולה מקומית למישור. באופן דומה, אם $K > 0$ מקבלים ספירה. ■

שימו לב

כדי להוכיח ששני משטחים שקולים מספיק להוכיח שקיימות קוארדינטות שהמטריקה הרימנית שלהם שקולה.

העתקה במקביל

נאמר ששדה וקטורי הוא העתקה במקביל של וקטור יחסית לעקומה γאם נתקיים שהנגזרת הקו־וריאנטית של השדה בכיוון המשיק לעקומה בכל מקום מתאפסת.

ז"א, ע"פ ההגדרה ניתן לרשום

$\dot{v}^i + \Gamma^i_{kl}v^l\dot{\gamma}^k$

כאשר $v^i = \frac{dv^i(\gamma(s))}{ds} = v^i_{\prime k}\dot\gamma^k$

ז"א שדה וקטורי v מעל γ המשיק למשטח M הוא שדה מקבילי $\Leftrightarrow$ הנגזרת הרגילה שלנו מאונכת למשטח M בכל נקודה.

ניתן להסיק מכך ששדה מקבילי $\Leftrightarrow$ העקום γ הוא קו גאודזי.

הגדרה 0.2 הזווית $\theta_i = \alpha_i(b) - \alpha_i(a)$ (a וb נקודות הקרובות אחת לשנייה). מבטאת שינוי כולל של וקטור $x_i(\beta)$ על שפת משטח M כשנאמר

זוית סיבוב מעודנת (עבור חלוקה) $\theta = \theta(M) = \theta_1 + .. + \theta_n$ מגדירים שני שדות וקטורים על משטח (או סביבה של נקודה במשטח) v, w כך ש (v, w) מהווה בסיס אורתונורמלי עם אוריינטציה קבועה בכל נקודה בסביבה. לכל שדה וקטורי x ניתן להגדיר זווית

$\alpha : M \to [0, 2\pi]$ כך ש $X(p) = v\cos\alpha(\beta) + w\sin\alpha(\beta)$ שינוי הזווית של העקומה:

$$\alpha(b) - \alpha(a) = \int \frac{d\alpha}{ds} ds$$

משפט 0.3 יהי M משטח רגולרי קומפקטי אורינטבילי. נניח שהשדה ∂M אינה ריקה ומורכבת מעקומות חלקות למקוטעין. אז זווית הסיבוב המעודכנת ביחס לM שוה לאנטגרל של עקמומות גאוס

$$\theta(M) = \iint_M K ds$$

הוכחה: נניח שהיריעה מכוסה ע"י מפה בודדת וכן שהמטריקה נתונה ע"י $ds^2 = dr_1^2 + hdr_2^2$ (נשתמש בקוארדינטות גאודזיות $v = r_1$ $w = \frac{r_2}{\sqrt{h}}$. יהיה X שדה יחידה מקבילי משיק לM אז

(#) $X(s) = \cos\alpha(s) \cdot v(\alpha(s)) + \sin\alpha(s) \cdot w(\alpha(s)) = \cos\alpha(s))r_1 + \frac{\sin\alpha(s)}{\sqrt{h}} r_2$

ע"פ המטריקה הנתונה וγ חלקה, אפשר לחשב את מקדמי כריסטופל ויוצא $\Gamma^1_{11} = 0$

$$\Gamma^1_{22} = -\frac{1}{2}\frac{\partial h}{\partial u^1} \;\; \Gamma^1_{12} = 0$$

נציב בנוסחה לעקמומיות גאוס המתאימה (שראינו בתחילת השיעור $K = -\frac{1}{\sqrt{h}}\frac{\partial^2\sqrt{h}}{\partial(u_1)^2}$ ((:)

מההעתקה במקביל ידוע $\dot X^i + \Gamma^i_{jk}\dot\gamma^j X^k = 0$

נציב את # במשוואה האחרונה ונקבל עבור $j = 1$

$$-(\sin\alpha)\dot\alpha(s) - \frac{1}{2}\frac{\partial h}{\partial u_1}\dot\gamma^2 \frac{1}{\sqrt{h}} \sin\alpha(s) = 0$$

(*) $\dot\alpha(s) = -\dot\gamma^2 \frac{\partial\sqrt{h}}{\partial u_1}$ ■

מכאן

$\theta = \alpha(b) - \alpha(a) = \int_a^b \dot\alpha(s) ds = -\int_{\partial U} \frac{\partial\sqrt{h}}{\partial u_1} du_2$ כאשר המעבר האחרון ע"פ (*)

$= -\iint_M \frac{\partial^2}{\partial u_1^2}\sqrt{h} du_1 du_2 =$ לפי משפט גרין עם $P = 0$ $Q = \frac{\partial\sqrt{h}}{\partial u_1}$

$\frac{\partial\sqrt{h}}{\partial u_1}\sqrt{h} = -K\sqrt{h}$ וע"פ הנוסחה (:)) ואז בסה"כ

$$\theta(M) = \iint_M K\sqrt{\det g} du_1 du_2 = \iint_M K ds$$

הרצאה 13

בשיעור שעבר הוכחנו את המשפט הבא:

משפט 0.1 יהיה M משטח רגולרי קומפקטי ואוריינטבילי. נניח שהשפה ∂M אינה ריקה ומורכבת מעקומות חלקות למקוטעין. אז זווית הסיבוב המעודנת ביחס לM שווה לאנטגרל על עקמומיות גאוס $g(M) = \iint_M K ds$

תזכורת־ זוית מעודנת היא הזווית המבטאת את השינוי הכללי של הוקטור $\theta =$
$\theta(M) = \theta_1 + .. + \theta_n$

הגדרה 0.2 תהי β הזווית בין $\dot{\gamma}$ לבין העתקה במקביל של וקטור כלשהו x לאורך γ. $K_\gamma = \frac{d\beta}{ds}$ נקראת העקמומיות הגאודזית של העקומה γ.

תזכורת

שדה מקביל $\Leftrightarrow$ העקום γ היא קו גאודזי.

הערה 0.3 עקמומיות גאודזית בנקודה על עקום מודדת את הסטייה של העקום מלהיות קו ישר באותה נקודה.

תזכורת

לאורך הקו הגאודזי הנורמל לעקומה מקביל לנורמל למשטח ולכן אין שינוי בזווית.

משפט 0.4 בתחום פשוט קשר $\iint_M K ds = 2\pi - \int_{\partial M} K_g ds$

הוכחה: נצייר זאת ביחס לשדה u וw . ע"פ הציור $\dot{\gamma}$ המשיק לעקומה γ בנקודה p. הזויית β מוגדרת ע"י וקטור x מהשדה המקבילי ו$\dot{\gamma}$ המשיק, ז"א β מהווה עקמומיות גאודזית.

בהנתן x שדה מקביל נגדיר α להיות הזווית בין x לu וβהזויית בין $\dot{\gamma}$ לx כאשר u שדה המסגרת (לפי ההעתקה במקביל שבחרנו).

נסמן $\phi = \beta + \alpha$, ברור $\phi(p) = \frac{d\phi}{ds}$ שהוא העקמומיות בנקודה p. ידוע שהעקומה שלנו סגורה ופשוטה (ז"א חותכת את עצמה) $\int \dot{\phi} ds = 2\pi$ (למדנו).

בנוסף מהמשפט משיעור שעבר ראינו שהזווית המעודנת ביחס לM שווה לאנטגרל של עקמומיות גאוס.

תזכורת בהנתן שני שדות וקטורים על משטח, נניח u,w מגדירים זווית מעודנת לשדה הוקטור x ע"י $x(p)=u\cos(\alpha(\beta))+w\sin\alpha(\beta)$.

חידדנו שהזויית המעודנת היא השינוי בוקטור x לאורך העקומה. הזווית הכוללת $\sum\alpha_i$ ראינו $\oint\dot{\alpha}ds=\iint_M Kds$

ולכן בסה"כ אם $\phi=\alpha+\beta$

$$\oint\dot{\alpha}+\dot{\beta}=\oint\dot{\phi}$$

$$\oint\dot{\alpha}ds+\oint\dot{\beta}ds=\oint\dot{\phi}ds$$

ולפי גאוס:

$$\iint_M Kds+\oint_{\partial M}K_gds=2\pi$$

$$\iint_M Kds=2\pi-\int_{\partial M}K_gds$$ ■

משפט גאוס בונה בונה לוקאלי

משולש גאודזי משולש (לא באמת) שקודקודיו מחוברים דרך קווים גאודזים.

משפט 0.5 במשולש גיאודזי סכום הזווית $\pi + \iint_{\Delta} Kds$

הוכחה: העקמומיות הגאודזית היא אפס (כי המשולש הוא גאודזי) ולכן כל העקמומיות מתקבלת מהקודקודים, שאלו בדיוק הזוויות החיצוניות.

$\alpha_i + \beta_i = \pi$

לפי הנוסחה: $\iint_M Kds = 2\pi - \int_{\partial M} k_g ds$

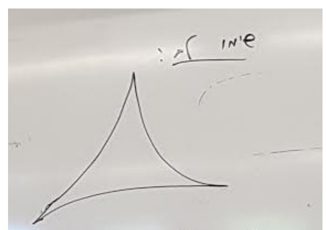
$\iint_M Kds = 2\pi - (\pi - \beta_1 + \pi - \beta_2 + \pi - \beta_3)$

$\iint_M Kds = -\pi + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3)$ וסיימנו. ■

מסקנה 0.6 במשולש גאודזי סכום הזוויות במשולש גדולות/שוות מπ

שימו לב

במשולש הנ"ל סכום הזוויות קטן/שווה לπ



משפט גאוס בונה גלובלי

תזכורת

נסמן χ מאפיין אוילר פואנקרה, כלומר (מספר קודקודים)+(מספר צלעות)־(מספר פאות)= $X = F - E + V$

נחלק את המשטח למשולשים ונספור את מספר הפאות פחות מספר הצלעות ועוד מספר הקודקודים. למשל בכדור, $F - E + V = 2$ **תמיד!** ותכונה זו קשורה לטופולוגיה בלבד ולא למבנה הגאומטרי.

משפט 0.7 עבור יריעה קומפקטית ללא גבול $\iint_M Kds = 2\pi\chi(M)$ כאשר χ מאפיין אוילר.

הוכחה: נחלק את המשטח למשולשים קטנים וכך שמשפט גאוס־בונה לוקאלי עובד עליהם. בכל משולש כזה מתקיים לפי המשפט הקודם

$$\beta = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = \pi + \iint_\Delta Kds + \int_{\partial\Delta} k_g ds$$

אם βסכום הזוויות במשולש נסכום את את סכום הזוויות בכל המשולשים

$$\sum_{k=1}^n \beta(k) = n\pi + \iint_M Kds$$

כאשר n מספר המשולשים ו$\beta(k)$ היא סכום הזוויות במשולש הk .

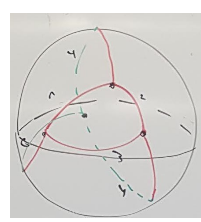
שימו לב: העקמומיות הגאודזית הצטמצמה, כי על כל צלע עברנו מספר פעמים אבל בכיוונים מנוגדים. בכל קודקוד המשותף לכמה משולשים סכום הזוויות הוא 2π ולכן סכום הזוויות הכולל הוא $2\pi V$. מספר הפאות הוא כמספר המשולשים ולכן נסמן $F = n$. בנוסף, בכל משולש 3 צלעות וכל צלע שייכלת לשני משולשים ולכן $3F = 2E$

ומכאן ש $n = F = 2E - 2F$

$$2\pi V = \pi(2E - 2F) + \iint_M Kds$$

$\frac{1}{2\pi}\iint_M Kds = V - E + F$ וזה אומר שסה"כ העקמומיות על גוף היא מוגבלת. ■

דוגמא



נרכיב את הספירה דרך 4 פוליגנים ולכן בהכרח מספר הפאות $F = 4$. מספר הקודקודים $E = 6$ $V = 4$

$$\iint_S Kds = 2\pi(4 - 6 + 4) = 4\pi$$

משפט הכדור השעיר

לא ניתן להגדיר שדה וקטורי רציף שאינו מתאפס באף נקודה על פני הכדור (או כל משטח אחר שמאפין אוילר־פואנקרה אינו אפס)

הוכחה: נניח קיים שדה כזה. ננרמל אותו, ברור שזה לא יפגע ברציפות. נשתמש בו כשדה v ונגדיר שדה $u = \hat{n} \times v$.

נתבונן בחצי הכדור הצפוני. אם נסתובב סביב קו המשווה נקבל זווית מעודנת ביחס למסגרת u וv של θ_N וסביב חצי הכדור הדרומי של θ_s נעשה באופן דומה.

כיוון שזה אותו קו חייב להתקיים $\theta_N + \theta_S = 0$ ומצד שני ממשפט גאוס בונה אפשר לחשב ש $\theta_N + \theta_S = 4\pi$ וזה כמובן סתירה. ■

חישוב העקמומיות בעזרת הגנוס

מאפין אוילר תלוי רק ב"טיפוס" הטופולוגי של המשטח ואינו תלוי בפירוק התאים או המטריקה הרימנית שלו. ניתן להוכיח גם הפוך, שבהנתן "טיפוס" טופולוגי של משטח אוריינטבילי סגור מוגדר ע"י מאפיין אוילר של $\chi(M)$. אנו יודעים מטופולוגיה שכל משטח אוריינטבילי סגור הומאומורפי לספירה עם מספר ידיות. מספר הידיות $g \geq 0$ נקרא **גנוס.** של המשטח. משטח עם גנוס אפס הומאומורפי לספירה. לטורוס, באופן דומה יש גנוס אחד. מאפיין אוילר של משטח מגנוס $g \geq 0$ שווה ל$\chi(M_g) = 2 - 2g$

נראה זאת

נבצע פירוק תאי של המשטח M_g, נניח בפירוק הזה, יש $V = g$ קודקודים. $E = 3g - 1$ $F = 1$

$$\chi(M_g) = g - (3g - 1) + 1 = 2 - 2g$$

שאלה

מה העקמומיות הכוללת של אליפסואיד?

תשובה

ברור שהגנוס במקרה זה הוא $g = 0$ ולכן אלפסואיד הומאומורפי לספירה. חשבנו בהרצאה שהקמומיות הכוללת של ספירה היא 4π ולכן גם העקמומיות הכוללת של אליפסואיד.

עד כאן גאומטריה אנליטית ודיפרנציאלית, היו שלום