שיעור חזרה

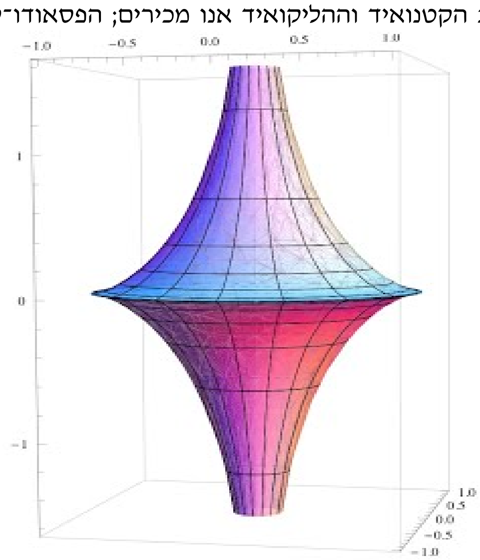
8 באוקטובר 2015

<u>תרגיל:</u>

הוכיחו כי ההליקואיד והקטנואיד איזומטריים זה לזה, אך לא איזומטריים לפסאודו־ספירה.

<u>פתרון:</u>

את הקטנואיד וההליקואיד אנו מכירים; הפסאודו־ספירה נראית כך:



אם כן, פרמטריזציה של הקטנואיד היא:

$$r(u,v) = (a\cosh v\cos u, a\cosh v\sin u, av)$$

ולאחר חישוב נקבל שמטריקת רימן המתאימה היא:

$$G = \begin{pmatrix} a^2\cosh^2 v & 0 \\ 0 & a^2\cosh^2 v \end{pmatrix}$$

בעזרת הזהות $1+\sinh^2 v = \cosh^2 v$.

פרמטריזציה של ההליקואיד היא:

$$r(x,y) = (x\cos y, x\sin y, ax)$$

אנחנו רוצים להראות שיש פרמטריזציה של ההליקואיד בה מטריקת רימן שלו שווה לזו של הקטנואיד (או להיפך).

לפיכך, נבצע החלפת משתנים:

$$(x,y) \longmapsto (a\sinh v, u)$$

והפרמטריזציה היא:

$$r(u,v) = (a\sinh v\cos u, a\sinh v\sin u, au)$$

ההחלפה הזו די מתבקשת.

לאחר חישוב אכן נקבל את אותה מטריקת רימן.

לעומתם, פרמטריזציה של הפסאודו־ספירה היא:

$$r(u,v) = \left(\frac{a\cos u}{\cosh v}, \frac{a\sin u}{\cosh v}, a\left(v-\tanh v\right)\right)$$

לאחר חישוב מקבלים את מטריקת רימן הבאה:

$$G = \begin{pmatrix} \frac{a^2}{\cosh^2 v} & 0 \\ 0 & \tanh^2 v \end{pmatrix}$$

איך נראה שהמשטחים אינם איזומטריים? אולי יש פרמטריזציה בה המטריקות זהות!

אם כך, נראה שהעקמומיות של הקטנואיד שונה מזו של הפסאודו־ספירה; לפי המשפט הנפלא, העקמומיות היא תכונה פנימית ולכן אם העקמומיות אכן שונה, המשטחים אינם איזומטריים.

לאחר חישוב (אפשר להשתמש במשפט הנפלא ואפשר לחשב את אופרטור הצורה) נקבל שהעקמומיות של הקטנואיד היא:

$$-\frac{1}{a^2\cosh^4 v}$$

בעוד שעקמומיותה של הפסאודו־ספירה היא:

$$-\frac{1}{a^2}$$

והן אכן שונות, וכמו שביארנו פירוש הדבר שהמשטחים אינם איזומטריים.

<u>תרגיל:</u>

משטח M ב־$\mathbb{R}^3$ נתון על ידי המשוואה:

$$z^2+\left(x^2+y^2-1\right)\left(2x^2+3y^2-1\right)=0$$

חשבו:

$$\iint\limits_M K d\sigma$$

<u>פתרון:</u>

נרצה להשתמש במשפט גאוס־בונה (אחיינו של אבא־בונה, שבשעת סיפור מוצא מקום מיוחד).

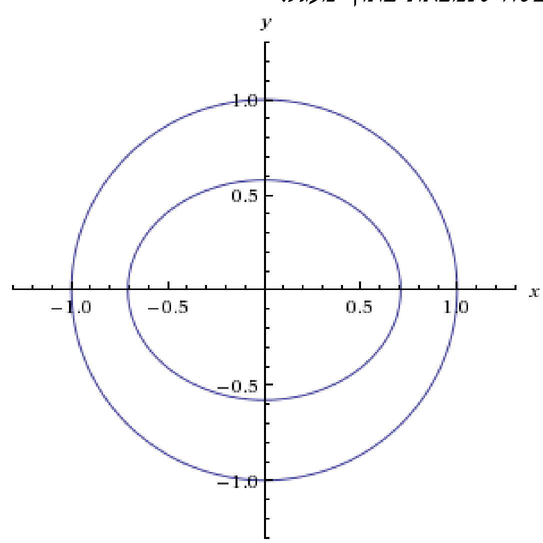
איך נראה המשטח שלנו? נעביר אגף ונוציא שורש:

$$z=\pm\sqrt{-\left(x^2+y^2-1\right)\left(2x^2+3y^2-1\right)}$$

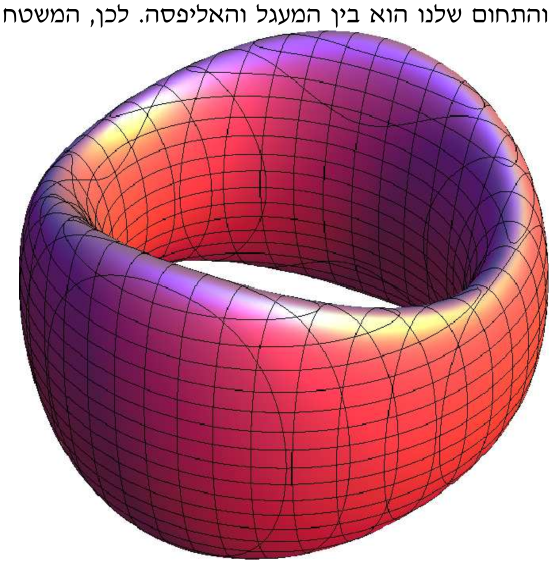
שימו לב שהמשטח סימטרי ביחס למישור xy.

אנו רוצים שהביטוי בתוך השורש יהיה כמובן אי־שלילי, כלומר שאחד מהביטויים במכפלה יהיה חיובי והשני שלילי.

אם נצייר את הגרפים של x^2+y^2-1 (מעגל) ושל $2x^2+3y^2-1$ (אליפסה) נקבל אליפסה שנמצאת בתוך מעגל:



והתחום שלנו הוא בין המעגל והאליפסה. לכן, המשטח שלנו הוא מין טורוס עקום:



למשטח יש "חור" אחד, ולכן הגנוס שלו הוא: $g=1$. אם כך, לפי משפט גאוס־בונה:

$$\iint\limits_{M} K d\sigma = 2\pi\left(2-2g\right) = 0$$

<u>תרגיל:</u>

עקומה רגולרית, פשוטה, סגורה וחלקה $\gamma:[0,L]\to\mathbb{R}^3$ נתונה בפרמטריזציה טבעית.

כמו כן, נתון כי: $\|\gamma''(t)\|\neq 0$ לכל t. נגדיר:

$$r(s,t)=\gamma(t)+s\hat{B}(t)$$

כאשר $\hat{B}$ הוא וקטור הבינורמל של γ.

א. הוכיחו ש־r הוא שיכון (אימרסיה).

ב. חשבו את עקמומיות גאוס ואת העקמומיות הממוצעת.

ג. הוכיחו כי γ קו גיאודזי על המשטח.

<u>פתרון:</u>

א. אנו בעצם רוצים להראות שהדיפרנציאל של r חח"ע, כלומר היעקוביאן היא מטריצה שדרגתה 2.

וקטורי הנגזרות הם:

$$r_s=\hat{B}(t), r_t=\gamma'(t)+s\hat{B}'(t)=\hat{T}(t)-s\tau(t)\hat{N}(t)$$

מכיוון ש־$\gamma'(t)=\hat{T}(t)$ (הפרמטריזציה הרי טבעית) וממשוואות פרנה־סרה, $\hat{B}'(t)=-\tau(t)\hat{N}(t)$.

כעת, אנו יודעים שהוקטורים $\hat{T},\hat{N},\hat{B}$ מהווים בסיס (אורתונורמלי עם אוריינטציה חיובית) ובפרט בת"ל, ולכן גם וקטורי הנגזרות בת"ל.

וקטורי הנגזרות הם העמודות של היעקוביאן, ולכן דרגתה 2 כנדרש.

ב. יש לחשב את מטריקת רימן ואת התבנית היסודית השנייה, ובעזרתן את אופרטור הצורה.

עקמומיות גאוס היא דטרמיננטתו של אופרטור הצורה, והעקמומיות הממוצעת שווה למחצית עקבתו.

בסופו של יום מקבלים (תוך שימוש במשוואות פרנה־סרה):

$$K = \det S = \frac{\tau^2(t)}{(1+s^2\tau^2(t))^2}$$
$$H = \frac{1}{2}trS = \frac{k(t)\left(1+s^2\tau^2(t)\right)-s\tau'(t)}{(1+s^2\tau^2(t))^{\frac{3}{2}}}$$

כן.

ג. עקומה היא קו גיאודזי אם ורק אם הנורמל למשטח מקביל לנורמל לעקומה.

לאחר חישוב (שכבר בוצע בסעיף ב'; את התבנית היסודית השנייה מחשבים בעזרת הנורמל למשטח) מקבלים:

$$\hat{n}(t,s) = \frac{\hat{N}(t) + s\tau(t)\hat{T}(t)}{\sqrt{1+s^2\tau^2(t)}}$$

על העקומה עצמה, $s=0$, ולכן:

$$\hat{n} = \hat{N}$$

ובוודאי שהם מקבילים, ולכן γ אכן קו גיאודזי.

<u>תרגיל:</u>

במישור (המנוקב) נתונה מטריקה רימנית: $ds^2 = r^2\left(dr^2 + r^2 d\phi^2\right)$.

הוכיחו שכל קו גיאודזי שאינו מהצורה $\phi = const$ מבודד מהראשית.

<u>פתרון:</u>

המטריקה שלנו היא:

$$G = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^4 \end{pmatrix}$$

ובעזרת חישוב, מקדמי כריסטופל (שאינם מתאפסים) הם:

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{r}, \Gamma^1_{22} = -2r, \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{2}{r}$$

אם כך, המשוואות הגיאודזיות הן:

$$\begin{cases} r'' + \frac{(r')^2}{r} - 2r(\phi')^2 = 0 \\ \phi'' + \frac{4r'\phi'}{r} = 0 \end{cases}$$

נשחק קצת עם המשוואה השנייה ונקבל: $\frac{\phi''}{\phi'} = -\frac{4r'}{r}$. לכן:

$$(\ln\phi')' = \frac{\phi''}{\phi'} = -\frac{4r'}{r} = (-4\ln r)' = \left(\ln r^{-4}\right)'$$

נבצע אינטגרציה על שני האגפים ונקבל:

$$\ln\phi' = \ln r^{-4} + \ln C = \ln\frac{C}{r^4} \Longrightarrow \phi' = \frac{C}{r^4}$$

נציב במשוואה הראשונה ונקבל:

$$r'' + \frac{(r')^2}{r} - 2r(\frac{C}{r^4})^2 = 0$$

נשחק קצת עם המשוואה ונקבל:

$$r^6 \cdot (rr')' = 2C^2$$

כאשר $(rr')' = (r')^2 + rr''$. אם כן, כאשר $r = 0$ (ואנו בראשית לפי הגדרת המטריקה) בהכרח $C = 0$.

כאשר $C = 0$, $\phi' = 0$ ולכן $\phi = const$.

לכן, רק קווים גיאודזיים מהצורה $\phi = const$ יגיעו לראשית (אם בכלל).

<u>תרגיל:</u>

תהי $\gamma : [0, L] \to \mathbb{R}^3$ עקומה רגולרית בפרמטריזציה טבעית עבורה $\tau(s), k(s) \neq 0$.

הוכיחו כי אם העקומה נמצאת כולה על ספירת היחידה אז:

$$R^2 + \left(R'T\right)^2 = const$$

כאשר:

$$R(s) = \frac{1}{k(s)}, T(s) = \frac{1}{\tau(s)}$$

<u>פתרון:</u>

העקומה נמצאת על ספירת היחידה, ולכן:

$$\left\|\gamma(s)\right\|^2 = \langle\gamma(s), \gamma(s)\rangle = 1$$

אנו רוצים להגיע לעקמומיות ולפיתול. לא נותר לנו אלא לגזור עד כאב:

$$0 = \frac{d}{ds}\left(\langle\gamma(s), \gamma(s)\rangle\right) = \langle\gamma'(s), \gamma(s)\rangle + \langle\gamma(s), \gamma'(s)\rangle = 2\left\langle\gamma(s), \hat{T}(s)\right\rangle$$

לפי כלל המכפלה, כאשר $\hat{T} = \gamma'$ כידוע. נגזור שנית:

$$0 = \frac{d}{ds}\left(\left\langle\gamma(s), \hat{T}(s)\right\rangle\right) = \left\langle\gamma(s), \hat{T}'(s)\right\rangle + \left\langle\gamma'(s), \hat{T}(s)\right\rangle = 1 + \left\langle\gamma(s), k(s)\hat{N}(s)\right\rangle$$

הגענו לכך בעזרת פרנה־סרה: $\hat{T}'(s) = k(s)\hat{N}(s)$, ובנוסף: $\left\langle\gamma'(s), \hat{T}(s)\right\rangle = \left\langle\hat{T}(s), \hat{T}(s)\right\rangle = 1$, שהרי $\hat{T}$ הוא משיק יחידה.

לפיכך,

$$\left\langle\gamma(s), k(s)\hat{N}(s)\right\rangle = -1 \Longrightarrow \left\langle\gamma(s), \hat{N}(s)\right\rangle = -\frac{1}{k(s)} = -R(s)$$

אנחנו משתמשים הרבה בתכונות המכפלה הפנימית, נא לשים לב.

מזמן לא גזרנו:

$$-R'(s) = \frac{d}{ds}\left(\left\langle \gamma(s), \hat{N}(s) \right\rangle\right) = \left\langle \gamma'(s), \hat{N}(s) \right\rangle + \left\langle \gamma(s), \hat{N}'(s) \right\rangle =$$

$$= \left\langle \hat{T}(s), \hat{N}(s) \right\rangle + \left\langle \gamma(s), -k(s)\hat{T}(s) - \tau(s)\hat{B}(s) \right\rangle$$

לפי משוואות פרנה־סרה. המשיק מאונך לנורמל ולכן $\left\langle \hat{T}(s), \hat{N}(s) \right\rangle = 0$ ונותרנו עם:

$$-R'(s) = \left\langle \gamma(s), -k(s)\hat{T}(s) - \tau(s)\hat{B}(s) \right\rangle = -k(s)\left\langle \gamma(s), \hat{T}(s) \right\rangle - \tau(s)\left\langle \gamma(s), \hat{B}(s) \right\rangle$$

לאחר הגזירה הראשונה קיבלנו: $\left\langle \gamma(s), \hat{T}(s) \right\rangle = 0$ ולכן:

$$-R'(s) = -\tau(s)\left\langle \gamma(s), \hat{B}(s) \right\rangle \Longrightarrow \left\langle \gamma(s), \hat{B}(s) \right\rangle = \frac{R'(s)}{\tau(s)} = R'(s)T(s)$$

כעת, אנו מכירים את שלושת הביטויים:

$$\left\langle \gamma(s), \hat{T}(s) \right\rangle, \left\langle \gamma(s), \hat{N}(s) \right\rangle, \left\langle \gamma(s), \hat{B}(s) \right\rangle$$

הוקטורים $\hat{T}, \hat{N}, \hat{B}$ מהווים בסיס אורתונורמלי, ולכן הביטויים האלו הם המקדמים של $\gamma(s)$ כצירוף ליניארי של וקטורי הבסיס האורתונורמלי הנ"ל, כלומר:

$$\gamma(s) = \left\langle \gamma(s), \hat{T}(s) \right\rangle \hat{T}(s) + \left\langle \gamma(s), \hat{N}(s) \right\rangle \hat{N}(s) + \left\langle \gamma(s), \hat{B}(s) \right\rangle \hat{B}(s)$$

זו תכונה נאה של בסיס אורתונורמלי ־ אנו יודעים מהם המקדמים בצירוף הליניארי.
אם כן, נציב את מה שחישבנו ונקבל:

$$\gamma(s) = -R(s)\hat{N}(s) + R'(s)T'(s)\hat{B}(s)$$

נכפול את הוקטור עם עצמו:

$$1=\langle\gamma(s),\gamma(s)\rangle=\left\langle -R(s)\hat{N}(s)+R'(s)T'(s)\hat{B}(s),-R(s)\hat{N}(s)+R'(s)T'(s)\hat{B}(s)\right\rangle$$

$$=R^2\left\langle\hat{N}(s),\hat{N}(s)\right\rangle-2R(s)R'(s)T(s)\left\langle\hat{N}(s),\hat{B}(s)\right\rangle+\left(R'T\right)^2\left\langle\hat{B}(s),\hat{B}(s)\right\rangle$$

ומכיוון שזהו בסיס אורתונורמלי:

$$1=R^2+\left(R'T\right)^2$$

ואכן הביטוי קבוע.

<u>תרגיל:</u>

תהי $\gamma:[0,L]\to\mathbb{R}^3$ עקומה שנמצאת כולה בתוך מעגל ברדיוס R.

הוכיחו שאם העקומה סגורה, קיים $s\in[0,L]$ עבורו $|k(s)|\geq\frac{1}{R}$.

<u>פתרון:</u>

ההגיון הוא פשוט. אם העקומה סגורה, היא צריכה לחזור לנקודה בה היא התחילה. מכיוון שהיא בתוך המעגל, היא צריכה באיזשהו שלב לבצע עיקול חד יותר מהמעגל, ושם העקמומיות יותר גדולה מעקמומיותו של המעגל, שהיא כידוע $\frac{1}{R}$.

אם כך, נתבונן בביטוי:

$$\frac{d}{ds}\left(\langle\gamma(s),\gamma'(s)\rangle\right)=\langle\gamma'(s),\gamma'(s)\rangle+\langle\gamma(s),\gamma''(s)\rangle=\left\|\gamma'(s)\right\|^2+\langle\gamma(s),\gamma''(s)\rangle$$

אם העקומה נתונה בפרמטריזציה טבעית, $\|\gamma'(s)\|=1$ ולכן:

$$L=\int_0^L ds=\int_0^L\left\|\gamma'(s)\right\|^2 ds=\left|\int_0^L\left(\frac{d}{ds}\left(\langle\gamma(s),\gamma'(s)\rangle\right)-\langle\gamma(s),\gamma''(s)\rangle\right)ds\right|=$$

$$=\left|\int_0^L\frac{d}{ds}\left(\langle\gamma(s),\gamma'(s)\rangle\right)ds-\int_0^L\langle\gamma(s),\gamma''(s)\rangle\,ds\right|=$$

כעת:

$$\int_0^L \frac{d}{ds}\left(\langle \gamma(s), \gamma'(s) \rangle\right) ds = \langle \gamma(L), \gamma'(L) \rangle - \langle \gamma(0), \gamma'(0) \rangle = 0$$

מכיוון שהעקומה סגורה. נישאר, אם כך, עם:

$$L = \left| \int_0^L \langle \gamma(s), \gamma''(s) \rangle \, ds \right| = \left| \int_0^L \left\langle \gamma(s), \hat{T}'(s) \right\rangle ds \right| = \left| \int_0^L \left\langle \gamma(s), k(s)\hat{N}(s) \right\rangle ds \right| =$$

$$= \left| \int_0^L k(s) \left\langle \gamma(s), \hat{N}(s) \right\rangle ds \right| \le \int_0^L |k(s)| \cdot \left| \left\langle \gamma(s), \hat{N}(s) \right\rangle \right| ds$$

לפי אי־שוויון קושי שוורץ:

$$\le \int_0^L |k(s)| \cdot \|\gamma(s)\| \cdot \left\| N\hat{(s)} \right\| ds$$

הפרמטריזציה טבעית ולכן $\left\| \hat{N}(s) \right\| = 1$. העקומה נמצאת כולה בתוך המעגל ולכן $\|\gamma(s)\| \le R$ ונקבל:

$$L \le \int_0^L R\,|k(s)|\,ds$$

כעת, נניח בשלילה שלכל $s \in [0, L]$ מתקיים: $|k(s)| < \frac{1}{R}$, ונקבל:

$$L \le \int_0^L R\,|k(s)|\,ds < \int_0^L R \cdot \frac{1}{R} = L$$

וסתירה, ולכן קיים $s \in [0, L]$ המקיים את הדרוש.