תרגול 9 בדידה להנדסה

22 בינואר 2015

<u>תרגיל:</u>

הוכיחו או הפריכו לגבי כל אחד מהפסוקים הבאים האם הוא טאוטולוגיה:

1. $(A \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow B$.

<u>פתרון:</u>.

נשתמש בטבלת אמת:

A	B	$A \rightarrow B$	$A \wedge (A \rightarrow B)$	$(A \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow B$
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

ולכן הפסוק הוא טאוטולוגיה.

2. $((A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C)$.

<u>פתרון:</u>

נשים לב שמקרה בו ערכי האמת הם:

$$A = 1, B = 0, C = 0$$

ערכו של הפסוק שלנו הוא 0 ולכן הוא אינו טאוטולוגיה.

<u>תרגיל:</u>

הוכיחו או הפריכו:

$$A \triangle B = (A \cup B) \cap (A^c \cup B^c)$$

<u>פתרון:</u>

נוכיח זאת.

$$A \triangle B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$$

נציג את ההפרש ע"י משלים:

$$A \triangle B = (A \cup B) \cap (A \cap B)^c$$

ולפי דה מורגן:

$$A \triangle B = (A \cup B) \cap (A^c \cup B^c)$$

<u>תרגיל:</u>

האם היחסים הבאים הם יחסי שקילות?

1. $R \subseteq (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ המוגדר ע"י $((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in R$ אם ורק אם $x_1 = x_2$.

<u>פתרון:</u>

נבדוק האם שלוש התכונות מתקיימות.

א. רפלקסיביות:

יהי $(x, y) \in \mathbb{Z}$. מתקיים $x = x$ ולכן לפי הגדרת היחס $((x, y), (x, y)) \in R$ ולכן היחס רפלקסיבי.

ב. סימטריות:

יהי $((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in R$. לפי הגדרת היחס, $x_1 = x_2$; לכן $x_2 = x_1$ ולכן לפי הגדרת היחס $((x_2, y_2), (x_1, y_1)) \in R$ ולכן היחס סימטרי.

ג. טרנזיטיביות:

יהיו $((x_1,y_1),(x_2,y_2)),((x_2,y_2),(x_3,y_3)) \in R$. לפי הגדרת היחס, $x_1 = x_2$ וגם $x_2 = x_3$ ולכן $x_1 = x_3$, ולפי הגדרת היחס $((x_1,y_1),(x_3,y_3)) \in R$ ולכן היחס טרנזיטיבי.

לכן היחס הוא יחס שקילות.

2. $R \subseteq (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ המוגדר ע"י $(a,b) \in R$ אם $((2|(a-b)) \vee 3|(a-b))$.

<u>פתרון:</u>

היחס אינו טרנזיטיבי, מכיוון ש-R $(7,5),(5,2) \in$ אך $(7,2) \notin R$.

<u>תרגיל:</u>

הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי אי־זוגי מתקיים:

$$24|n^3 - 25n$$

<u>פתרון:</u>

נבדוק את נכונות הטענה עבור $n = 1$:

$$n^3 - 25n = -24$$

ואכן $24| - 24$ ולכן הטענה נכונה עבור $n = 1$.

מכיוון שאנו מדברים על טבעיים אי־זוגיים, נניח שהטענה נכונה עבור $n = 2k+1$, כלומר:

$$24|(2k+1)^3 - 25(2k+1)$$

ונוכיח שהטענה נכונה עבור $n = 2k+3$, כלומר צ"ל:

$$24|(2k+3)^3 - 25(2k+3)$$

אנו רוצים להשתמש בהנחת האינדוקציה, ולכן "נשלוף" מהביטוי שלנו את הביטוי שבהנחה.

נשים לב שמתקיים:

$$(2k+3)^3 = (2k+1)^3 + 2(2k+1)^2 + 2^2(2k+1) + 2^3$$

לפי הבינום של ניוטון ("נוסחאות הכפל המקוצר" בלעז), ולכן:

$$(2k+3)^3 - 25(2k+3) = (2k+1)^3 + 3\cdot 2(2k+1)^2 + 3\cdot 2^2(2k+1) + 2^3 - 25(2k+3)$$

ואם נסדר קצת את הביטוי נקבל:

$$(2k+3)^3 - 25(2k+3) = (2k+1)^3 - 25(2k+1) + 3\cdot 2(2k+1)^2 + 3\cdot 2^2(2k+1) + 2^3 - 50$$

שני האיברים הימניים בצד ימין אכן מתחלקים ב-24 לפי הנחת האינדוקציה; נותר לנו להראות שהביטוי:

$$2(2k+1)^2 + 2^2(2k+1) + 2^3 - 50$$

אכן מתחלק ב-24. אם כן,

$$3\cdot 2(2k+1)^2 + 3\cdot 2^2(2k+1) + 2^3 - 50 = 24k^2 + 48k - 24$$

וזה אכן מתחלק ב-24, וסה"כ הוכחנו את הדרוש.

<u>תרגיל:</u>

הוכיחו כי $A_1 \triangle ... \triangle A_n$ היא קבוצת כל האיברים שנמצאים במספר אי זוגי של קבוצות A_i.

<u>פתרון:</u>

נוכיח באינדוקציה על n, מספר הקבוצות.

עבור $n=1$ נקבל פשוט A_1 והאיברים שנמצאים ב$-A_1$ אכן נמצאים רק בקבוצה אחת (הלא היא A_1) ולכן נמצאים במספר אי זוגי של קבוצות, והטענה נכונה.

ליתר ביטחון וכסת"ח נבדוק גם עבור $n=2$. במקרה זה נקבל את $A_1 \triangle A_2$ ולפי הגדרת הפרש סימטרי בקבוצה זו נמצאים האיברים שנמצאים רק באחת מהקבוצות, ולכן במספר אי זוגי של קבוצות, והטענה נכונה.

כעת, נניח שהטענה נכונה עבור $n=k$, כלומר הקבוצה $A_1 \triangle \ldots \triangle A_k$ היא קבוצת כל האיברים שנמצאים במספר אי זוגי של קבוצות מתוך הקבוצות $A_1 \ldots A_k$ שלנו.

נוכיח את נכונות הטענה עבור $n=k+1$, כלומר צ"ל שהקבוצה $A_1 \triangle \ldots \triangle A_k \triangle A_{k+1}$ היא קבוצת כל האיברים שנמצאים במספר אי זוגי של קבוצות מתוך הקבוצות $A_1 \ldots A_k, A_{k+1}$.

נשים לב ש:

$$A_1 \triangle \ldots \triangle A_k \triangle A_{k+1} = (A_1 \triangle \ldots \triangle A_k) \triangle A_{k+1}$$

כעת יהי $x \in (A_1 \triangle \ldots \triangle A_k) \triangle A_{k+1}$.

לפי הגדרת הפרש סימטרי, $x \in A_1 \triangle \ldots \triangle A_k$ וגם $x \notin A_{k+1}$ או $x \notin A_1 \triangle \ldots \triangle A_k$ וגם $x \in A_{k+1}$.

אם $x \in A_1 \triangle \ldots \triangle A_k$ וגם $x \notin A_{k+1}$ לפי הנחת האינדוקציה x נמצא במספר אי זוגי של קבוצות מתוך $A_1 \ldots A_k$. מכיוון שהוא לא נמצא ב$-A_{k+1}$ נקבל שהוא אכן נמצא במספר אי זוגי של קבוצות מתוך $A_1 \ldots A_k, A_{k+}$.

אם $x \notin A_1 \triangle \ldots \triangle A_k$ וגם $x \in A_{k+1}$, לפי הנחת האינדוקציה x לא נמצא סמפר אי זוגי של קבוצות מתוך $A_1 \ldots A_k$, כלומר הוא נמצא במספר זוגי של קבוצות מתוך $A_1 \ldots A_k$.

מכיוון שהוא נמצא בעוד קבוצה, A_{k+1}, נקבל שהוא נמצא במספר אי זוגי של קבוצות מתוך הקבוצות $A_1 \ldots A_k, A_{k+1}$ (נוסיף לזוגי אחד ונקבל אי זוגי).

בסה"כ קיבלנו ש$-x$ נמצא במספר אי זוגי של קבוצות מתוך $A_1 \ldots A_k, A_{k+1}$ ולכן הוכחנו את הטענה.