

# מבוא להסתברות וסטטיסטיקה

15 במרץ 2016

תרגיל 3-תכונות של ההסתברות, ההסתברות מותנית,

ההסתברות שלמה, נוסחת בייס

1. 2 ילדים מתאמנים בקליעה לסל. הראשון קולע 60% מהזריקות והשני קולע 80% מהזריקות. כל אחד מהם זורק פעם אחת.

(א) מה ההסתברות שלפחות אחד יקלע?

(ב) מה ההסתברות שרק אחד יקלע?

(ג) מה ההסתברות שאף אחד לא יקלע?

(ד) מה ההסתברות שרק הראשון יקלע?

2. זורקים קובייה עד שמקבלים את המספר 6, ואז מפסיקים לזרוק.

(א) מה מרחב המדגם של הניסוי?

(ב) נקרא למאורע שצריך לזרוק את הקובייה  $n$  פעמים  $E_n$ . כמה נקודות

ממרחב המדגם נמצאות בתוך  $E_n$  ?

3. בעיר שאוכלוסייתה מונה 100,000 איש יש 3 עיתונים (א', ב' ו-ג'). אחוזי

הקוראים הם כדלהלן: א' נקרא ע"י 10%, ב' נקרא ע"י 30%, ג' נקרא ע"י 5%.

א' ו-ב' נקראים ע"י 8%, א' ו-ג' נקראים ע"י 2%, ב' ו-ג' נקראים ע"י 4%, רק 1%

קורא את שלושת העיתונים.

- (א) מה מספר האנשים הקוראים עיתון אחד בלבד?
- (ב) מה מספר האנשים שקוראים לפחות שני עיתונים?
- (ג) אם א' ו-ג' הם עיתוני בוקר ו-ב' הוא עיתון ערב, כמה אנשים קוראים לפחות עיתון ערב אחד ועיתון בוקר אחד?
- (ד) כמה אנשים קוראים רק עיתון בוקר אחד ועיתון ערב אחד?
4. בהטלת קוביות הוגנות נגדיר את המאורעות הבאים:
- A - בקוביה האדומה התקבל 1 או 2.
- B - בקוביה הכחולה התקבל 3 או 4 או 5.
- C - סכום התוצאות בשתי הקוביות הוא 3 או 4 או 5.
- האם המאורעות A, B ו-C תלויים או בלתי תלויים (במשותף)?
5. יוסי שם  $n$  סוגים שונים של גבינות בשורה בצורה אקראית כך שבין כל שתי גבינות יש רווח. לאחר מכן הוא מניח מלפפון חמוץ באחד מ- $n - 1$  הרווחים בין הגבינות בצורה אקראית.
- (א) מה הסיכוי שגבינת העיזים והצפתית (2 מ- $n$  סוגי הגבינות) יהיו בצדדים שונים של המלפפון החמוץ? השתמשו בנוסחת ההסתברות השלמה.
- (ב) בהתייחס לסעיף א, מה יקרה אם נשאיף את  $n$  לאינסוף?
6. תזכורת: המאורעות  $A_1, \dots, A_n$  בלתי תלויים במשותף אם ההסתברות של כל חיתוך מהצורה  $\alpha_1 \dots \alpha_n \in \{0, 1\}$   $A_1^{\alpha_1} \cap \dots \cap A_n^{\alpha_n}$  ("אטום") שווה למכפלת ההסתברויות של הקבוצות המשתתפות בחיתוך.
- הוכח: המאורעות  $A_1, \dots, A_n$  בלתי תלויים במשותף אם ורק אם לכל תת-קבוצה  $I$  של  $1, \dots, n$ , ההסתברות של  $\bigcap_{i \in I} A_i$  שווה למכפלת ההסתברויות  $P(A_i)$  עבור  $i \in I$ .
- [הדרכה: ( $\Leftarrow$ ) החיתוך של המאורעות ב- $I$  הוא איחוד של מאורעות "אטומיים"; ( $\Rightarrow$ ) באינדוקציה על מספר הפעמים שמופיע בהגדרת האטום המשלים של  $A_i$ ].

7. עורכים את הניסוי הבא. בשלב ראשון מטילים קוביה כדי לקבוע האם ניתן בשלב השני יתרון ל-0 (אם יצא 1,2,3) או ל-1 (אם יצא 4,5,6). בהתאם לכך, מטילים בשלב השני שני מטבעות בלתי תלויים, אך מוטים שניהם באותו כיוון; הם נופלים בהסתברות  $2/3$  על אחד הצדדים, כפי שנקבע בשלב הראשון.

(א) נסמן ב- $A, B$  את המאורעות "המטבע הראשון נפל על 1", ו"המטבע השני נפל על 1". הראו ש- $P(A) = 1/2$ .

(ב) חשבו את  $P(B|A)$ .

(ג) הסבירו כיצד יתכן ש- $A, B$  תלויים, למרות שהם בלתי תלויים בהנתן כל ערך אפשרי של הקוביה.

8. 100 אלף נשים ישראליות הועסקו כשכירות בהיי-טק ב-2014 - כ-35% מהשכירים בענף, כך לפי נתוני הלמ"ס... מבין הנשים המועסקות בהיי-טק, 64% מועסקות... לא בתפקידי הליבה... נשים מהוות 26% בלבד מהשכירים בתפקידי הליבה בענף." (מתוך <http://www.haaretz.co.il/tmr/1.2874529>, "הארץ", 6/3/2016).

איזה אחוז מן הנשים מועסקות בתפקידי הליבה? איזה אחוז מן הגברים?

9. סטודנט עונה על שאלה במבחן אמריקאי שלה יש  $m$  אפשרויות נתונות לתשובה באופן הבא: בהסתברות  $p$  התלמיד למד את נושא השאלה ולכן יודע לבחור תשובה נכונה, אחרת הוא מנחש את התשובה.

(א) מהי ההסתברות שהסטודנט למד את נושא השאלה בהינתן שהוא ענה נכונה על השאלה?

(ב) נתחו את התוצאה עבור  $m = 1$  ועבור  $m \rightarrow \infty$ .

10. ספק החולצות "ברארה" מקבל תוצרת מ-2 מפעלי טקסטיל. מפעל A מספק 40 אחוזים מהסחורה והיתר מסופק ע"י מפעל B. על סמך ניסיון העבר, ידוע שחמישית מהחולצות של מפעל A פגומות. במפעל B עובדים ב-2 משמרות מסביב לשעון. במשמרת היום, בה מיוצרות 70 אחוז מהחולצות, עשירית מהחולצות יוצאות פגומות, ואילו במשמרת הלילה 30 אחוז מהחולצות יוצאות פגומות.

(א) מהי ההסתברות לחולצה פגומה אצל "ברארה" ?

- (ב) מהי ההסתברות שחולצה שנמצאה פגומה ב"ברארה" יוצרה במפעל A?
- (ג) מהי ההסתברות שחולצה שנמצאה פגומה ב"ברארה" יוצרה במפעל B במשמרת היום?
- (ד) מהי ההסתברות שחולצה שנמצאה פגומה ב"ברארה" יוצרה במפעל B במשמרת הלילה?