לינארית להנדסה- פתרון תיאורטי 3

תרגיל 1. תהי $A \in \mathbb{R}^{3\times 7}$ כך ש-$rank\left(A\right)=3$

1. האם השורות A הן בסיס ל-$R\left(A\right)$
2. האם עמודות A הן בסיס ל-$C\left(A\right)$
3. מה מימד מרחב האפס של המטריצה A?

- נתון ש-$Rank\left(A\right)=3$ לכן

$$dim\left(C\left(A\right)\right)=dim\left(R\left(A\right)\right)=3$$

בנוסף נתון שמטריצה יש 3 שורות ו7- עמודות

(א) נתבונן בקבוצה הווקטורים שבשורות

$$D_1=\left\{R_1\left(A\right),R_2\left(A\right),R_3\left(A\right)\right\}$$

מהנתון

$$dim\left(span\left(D_1\right)\right)=dim\left(R\left(A\right)\right)=3$$

כיוון ש- $|D_1|=3$ והיא פורשת את $R\left(A\right)$ לפי משפט שלישי חינם נקבל ש-D_1 בסיס ל-$R\left(A\right)$

(ב) תבונן בקבוצה הווקטורים שבעמודות

$$D_2=\left\{C_1\left(A\right),C_2\left(A\right),C_3\left(A\right),C_4\left(A\right),C_5\left(A\right),C_6\left(A\right),C_7\left(A\right)\right\}$$

מהנתון

$$dim\left(span\left(D_2\right)\right)=dim\left(C\left(A\right)\right)=3$$

כיוו ש-$|D_2|=7$ לא יתכן ש-D_2תהיה בסיס ל-$C\left(A\right)$

(ג) לפי משפט הדרגה מתקיים עבור מטריצה $A\in\mathbb{F}^{3\times 7}$ מתקיים

$$rank\left(A\right)+dim\left(N\left(A\right)\right)=m$$

ובתרגיל שלנו

$$3+dim\left(N\left(A\right)\right)=7$$

לכן

$$dim\left(N\left(A\right)\right)=4$$

תרגיל 2.

תהי $A=\begin{pmatrix}1&1&2&0\\2&0&2&1\\3&-1&2&2\end{pmatrix}$ מצאו בסיס ל-$R\left(A\right),C\left(A\right),N\left(A\right)$

פתרון. ראשית יש לדרג את המטריצה

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & -4 & 2 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן

- בסיס למרחב השורות הן השורות לאחר הדירוג של התאפסו, שהן

$$B_R = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

- בסיס למרחב העמודות הן העמודות המקוריות שבהן יש איברים מובילים לאחר הדירוג, שהן

$$B_C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

- בסיס למרחב האפס הוא בעצם הפתרון הכללי של המערכת ההומוגנית

$$N(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \middle| \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{c} w = t \\ z = s \\ y = -s + \frac{1}{2}t \\ x = -s - \frac{1}{2}t \end{array} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} -s - \frac{1}{2}t \\ -s + \frac{1}{2}t \\ s \\ t \end{pmatrix} \right\} = span \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

תרגיל 3.

יהי $V = \mathbb{R}_3[x]$ מרחב הפולינומים ממעלה קטנה או שווה ל-3, ותהי

$$U = \left\{ p(x) \in V \mid p(x) = x \cdot p'(0) + x^2 \cdot p''(0) \right\}$$

תת קבוצה של V. ($p'(x)$ היא הנגזרת של $p(x)$)

1. הוכיחו ש-U תת מרחב של V.

פתרון.

- שייכות של וקטור ה-0: יהי $0(x)$ פולינום ה-0 והוא מקיים

$$0(x) = 0 = x \cdot 0'(0) + x^2 \cdot 0''(0)$$

לכן $\{0(x)\} \in U$

- סגירות: יהי $p(x), q(x) \in U$ פולינומים מקיימים

$$p(x) = x \cdot p'(0) + x^2 \cdot p''(0)\,,\ q(x) = x \cdot q'(0) + x^2 \cdot q''(0)$$

ו-$\alpha \in \mathbb{R}$ אז

$$\begin{aligned} p(x) + \alpha q(x) &= x \cdot p'(0) + x^2 \cdot p''(0) + \alpha\left(q'(0) + x^2 \cdot q''(0)\right) &= \\ &= x \cdot (p'(0) + \alpha q'(0)) + x^2 (p''(0) + \alpha q''(0)) &= \\ & x \cdot (p(0) + \alpha q(0))' + x^2 (p(0) + \alpha q(0))'' \end{aligned}$$

מכאן $p(x) + \alpha q(x) \in U$ ולכן U הוא תת מרחב של V

2. מצאו בסיס ומימד ל-U.

פתרון.

$$\begin{aligned} & U &= \\ & \left\{p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \in V \mid a + bx + cx^2 + dx^3 = x \cdot \left(b + 2c \cdot 0 + 3d \cdot 0^2\right) + x^2 \cdot (2c + 6d \cdot 0)\right\} &= \\ & \left\{p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \in V \mid a + bx + cx^2 + dx^3 = bx + 2cx^2\right\} &= \\ & \left\{p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \in V \mid a = 0, c = 0, d = 0\right\} &= \\ & \{p(x) = bx :\ b \in \mathbb{R}\} &= \\ & Span\{x\} \end{aligned}$$

המימד הוא 1

תרגיל 4. יהיו $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$הוכח/הפרך.

1. נתון ש-$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in N(A)$ אז העמודות של A ת"ל

פתרון. נכון,

נתון ש-$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in N(A)$ לכן

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

לפי כפל עמודה עמודה נקבל ש-

$$C_1(A) + C_2(A) + \ldots + C_n(A) = 0$$

כלומר קיים צ"ל לא טריוואלי שנותן 0, לכן העמודות ת"ל.

2. $dim\left(N\left(A\right)\right)=rank\left(A\right)$

פתרון. לא נכון,

ניקח את $A=0$ אז

$$rank\left(A\right)=0$$

כיוון שאין איברים מובילים, וכן

$$N\left(A\right)=\mathbb{R}^{n}$$

לכן

$$dim\left(N\left(A\right)\right)=n$$

3. A הפיכה אם ורק אם $rank\left(A\right)=n$

פתרון. נכון,

A הפיכה אם ורק אם הצורה הקנונית של A היא I אם ורק אם $rank\left(A\right)=n$

4. $rank\left(A+B\right)\leq rank\left(A\right)+rank\left(B\right)$

פתרון. נכון, יהי

$$\left\{ v_{1},\ldots v_{n_{A}}\right\}$$

בסיס למרחב שורות של A ו-

$$\left\{ w_{1},\ldots w_{n_{B}}\right\}$$

בסיס למרחב שורות של B אז כל שורה של $A+B$ נתנת להצגה כצירוף לינארית של הקבוצה

$$\left\{ v_{1},\ldots v_{n_{A}},w_{1},\ldots w_{n_{B}}\right\}$$

כלומר הקבוצה הנ"ל היא פורשת את $R\left(A+B\right)$ ולכן

$$rank\left(A+B\right)=dim\left(R\left(A+B\right)\right)\leq\left|\left\{ v_{1},\ldots v_{n_{A}},w_{1},\ldots w_{n_{B}}\right\} \right|\overset{*}{\leq}n_{A}+n_{B}=rank\left(A\right)+rank\left(B\right)$$

*יתכן מצב שבו $v_{i}=w_{j}$ ואז במקרה זה יש אי שוויון

תרגיל 5. יהי $v\in\mathbb{R}^{n\times1}$ ($n>1$) אז $A=vv^{t}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ האם המטריצה A הפיכה? במידה וכן מצא v כזה, אחרת הוכח שאינה הפיכה.

פתרון. המטריצה A אינה הפיכה, בתרגול הוכחנו ש-

$$rank\left(AB\right)\leq rank\left(A\right)$$

בפרט עבור ווקטורים כלומר

$$rank\left(A\right)=rank\left(vv^{t}\right)\leq rank\left(v\right)\leq1$$

מכאן שהדרגה של A היא לכל היותר 1 ולכן אינה הפיכה.

תרגיל 6. נתונים הווקטורים

$$v_{1}=\left(\begin{array}{c}
1\\
1\\
1
\end{array}\right),v_{2}=\left(\begin{array}{c}
1\\
1\\
0
\end{array}\right),v_{3}=\left(\begin{array}{c}
1\\
1\\
4
\end{array}\right),v_{4}=\left(\begin{array}{c}
-1\\
0\\
1
\end{array}\right)$$

1. השלימו את $\{v_1,v_2\}$ כך שיהיה בסיס ל-$\mathbb{R}^3$

פתרון. אנחנו צריכים למצוא ווקטור $v\notin sp\{v_1,v_2\}$ כדי לעשות זאת בקלות נעבור להצגה של משוואות

$$\begin{pmatrix}1&1&x\\1&1&y\\1&0&z\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&x\\0&0&y-x\\0&-1&z-x\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&x\\0&1&x-z\\0&0&y-x\end{pmatrix}$$

כלומר

$$sp\{v_1,v_2\}=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}|y-x=0\right\}$$

לכן נבחר ווקטור **שלא** מקיים את התנאי הנ"ל למשל $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

2. מצאו קבוצה B בת"ל, כך ש $B\subseteq\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ ופורשת את $Sp\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$, האם B הוא בסיס ל-$\mathbb{R}^3$? נמקו.

פתרון. נסדר את v_1,v_2,v_3,v_4 כווקטורי עמודה במטריצה ונמצא בסיס ל- $C(A)$

$$\begin{pmatrix}1&1&1&-1\\1&1&1&0\\1&0&4&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-1&2\\0&0&0&1\\0&-1&3&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-1&2\\0&-1&3&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

יש איברים מובילים בעמודות 1,2,4 , לכן בסיס למרחב העמודות הן העמודות המקוריות של המטריצה כלומר $B=\{v_1,v_2,v_4\}$, ולפי משפט שלישי חינם B הוא בסיס ל-$\mathbb{R}^3$

תרגיל 7. יהי $V=\mathbb{R}^2$ מ"ו נגדיר $\langle u,v\rangle=u^t\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}v$

1. הוכיחו שזאת מכפלה פנימית.

פתרון. נוכיח את שלושת התכונות של מכפלה פנימית.

- לינארית

$$\langle u+\alpha w,v\rangle=(u+\alpha w)^t\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}v=u^t\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}v+\alpha w^t\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}v=\langle u,v\rangle+\alpha\langle w,v\rangle$$

- הרמיטיות

$$\langle u,v\rangle=u^t\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}v=\left(v^t\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}^tu\right)^t=v^t\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}u=\langle v,u\rangle$$

- חיובית

$$\langle v,v\rangle=\begin{pmatrix}v_1&v_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}=2v_1^2+2v_1v_2+2v_2^2=v_1^2+(v_1+v_2)^2+v_2^2\geq 0$$

וזה יהיה שווה ל-0 רק אם $v_1=v_2=0$

2. חשבו את $\left\langle\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\rangle$ מה ניתן לומר על הווקטורים הללו?

פתרון. נחשב את הביטוי.

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

כלומר הוקטורים הנ"ל אורתוגונלים

3. הוכיחו שלכל $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ מתקיים

$$\sqrt{(x_1+x_2)^2 + (x_1+x_2)(y_1+y_2) + (y_1+y_2)^2} \leq \sqrt{x_1^2 + x_1y_1 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + x_2y_2 + y_2^2}$$

רמז: אי-שיוון המשולש

פתרון. נחשב את הנורמות של $v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, v_1 + v_2$.

$$\begin{aligned}
\|v_1\| &= \sqrt{\langle v_1, v_1 \rangle} = \\
&= \sqrt{\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}} = \sqrt{2x_1^2 + 2x_1y_1 + 2y_1^2} \\
\|v_2\| &= \sqrt{\langle v_2, v_2 \rangle} = \\
&= \sqrt{\begin{pmatrix} x_2 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}} = \sqrt{2x_2^2 + 2x_2y_2 + 2y_2^2} \\
\|v_1 + v_2\| &= \sqrt{\langle v_1 + v_2, v_1 + v_2 \rangle} = \\
&= \sqrt{\begin{pmatrix} x_1 + x_2 & y_1 + y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}} = \\
&= \sqrt{(x_1+x_2)^2 + (x_1+x_2)(y_1+y_2) + (y_1+y_2)^2}
\end{aligned}$$

ולפי אי-שיוון המשולש מתקיים $\|v_1 + v_2\| \leq \|v_1\| + \|v_2\|$ומכאן

$$\sqrt{(x_1+x_2)^2 + (x_1+x_2)(y_1+y_2) + (y_1+y_2)^2} \leq \sqrt{x_1^2 + x_1y_1 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + x_2y_2 + y_2^2}$$

תרגיל 8. יהיו $x, y \in V / \{0\}$ נגדיר $u = x - \frac{\langle x,y \rangle y}{\|y\|^2}$

1. הוכיחו ש-u ניצב ל-y כלומר $\langle u, y \rangle = 0$

פתרון. נראה ש- $\langle u, y \rangle = 0$.

$$\begin{aligned}
\langle u, y \rangle &= \left\langle x - \frac{\langle x,y \rangle y}{\|y\|^2}, y \right\rangle = \\
&= \langle x, y \rangle - \frac{\langle x,y \rangle}{\|y\|^2} \langle y, y \rangle = \\
&= \langle x, y \rangle - \frac{\langle x,y \rangle}{\|y\|^2} \|y\|^2 = 0
\end{aligned}$$

2. הוכיחו ש-$\langle u,u\rangle = \langle u,x\rangle$

פתרון. נפתח את הביטוי $\langle u,u\rangle$.

$$\begin{aligned} \langle u,u\rangle &= \left\langle u, x-\frac{\langle x,y\rangle y}{\|y\|^2}\right\rangle &= \\ &= \langle u,x\rangle + \left\langle u, -\frac{\langle x,y\rangle y}{\|y\|^2}\right\rangle &= \\ &= \langle u,x\rangle - \frac{\langle x,y\rangle}{\|y\|^2}\langle u,y\rangle &= \\ & \langle u,x\rangle - \frac{\langle x,y\rangle y}{\|y\|^2}\cdot 0 &= \langle u,x\rangle \end{aligned}$$

3. הראו ש-$0 \le \|x\|^2 - \frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\|y\|^2}$. רמז: נשים לב ש- $0 \le \langle u,u\rangle$

פתרון. נפתח את הביטוי $\langle u,u\rangle$.

$$\begin{aligned} \langle u,u\rangle &= \langle u,x\rangle &= \\ &= \left\langle x-\frac{\langle x,y\rangle y}{\|y\|^2}, x\right\rangle &= \\ &= \langle x,x\rangle - \frac{\langle x,y\rangle}{\|y\|^2}\langle y,x\rangle &= \|x\|^2 - \frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\|y\|^2} \end{aligned}$$

לכן

$$0 \le \|x\|^2 - \frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\|y\|^2}$$

4. הסיקו את אי שיוויון קושי שוורץ.

פתרון. נפתח את הביטוי $\langle u,u\rangle$.

$$\begin{gathered} 0 \le \|x\|^2 - \frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\|y\|^2} \\ \Downarrow \\ \|x\|^2\,\|y\|^2 \ge |\langle x,y\rangle|^2 \\ \Downarrow \\ \|x\|\,\|y\| \ge |\langle x,y\rangle| \end{gathered}$$

בהצלחה!!