הפונקציה ההופכית של פונקציה עולה ורציפה היא (עולה ו)רציפה

בועז צבאן

3 בינואר 2018

1 אפיון מושגים חד־צדדיים בעזרת סדרות מונוטוניות

למה 1.1 א. a היא נקודת הצטברות משמאל של קבוצה X $\iff$ יש סידרה עולה ממש $X \ni x_n \longrightarrow a$.

א. a היא נקודת הצטברות משמאל של קבוצה X $\iff$ יש סידרה יורדת ממש $X \ni x_n \longrightarrow a$.

הוכחה: ההוכחה דומה להוכחה שבכל קבוצה עם סופרמום, יש סידרה שעולה לסופרמום שלה.

נוכיח את סעיף א. הוכחת הסעיף השני דומה (לחילופין, אפשר להסיק מסעיף א).

($\Rightarrow$) מיידי מההגדרה.

($\Leftarrow$) מהנתון, לכל $\delta > 0$ יש נקודה בקבוצה $X \cap (a-\delta, a)$, כלומר נקודה $x \in X$ כך ש $a - \delta < x < a$.

ניקח בקבוצה X נקודה $a - \frac{1}{1} < x_1 < a$.

עבור $n > 1$, ניקח בקבוצה X נקודה $\max\left\{a - \frac{1}{n}, x_{n-1}\right\} < x_n < a$.

הסידרה (x_n) עולה ממש. כיון ש $a - \frac{1}{n} < x_n < a$ לכל n, נקבל מסנדביץ' ש $x_n \longrightarrow a$.

$\blacksquare$

למה 1.2 א. $\lim_{x\to a^-} f(x) = b$ $\iff$ לכל סידרה עולה ממש $x_n \longrightarrow a$ בתחום הפונקציה, מתקיים $f(x_n) \longrightarrow b$.

ב. $\lim_{x\to a^+} f(x) = b$ $\iff$ לכל סידרה יורדת ממש $x_n \longrightarrow a$ בתחום הפונקציה, מתקיים $f(x_n) \longrightarrow b$.

הוכחה: ההוכחה דומה להוכחה הקודמת. נוכיח את סעיף א. הוכחת הסעיף השני דומה (לחילופין, אפשר להסיק מסעיף א).

($\Leftarrow$) מיידי, כיון שהסידרה x_n עולה ממש וגבולה a, בהכרח $x_n < a$ לכל n ולכן הגדרת הגבול משמאל תקפה עבור סידרה זו.

($\Rightarrow$) נראה את הנוסח השקול עם ϵ-δ. ההוכחה כמעט זהה להוכחת שקילות הגדרת הגבול (הרגיל) בלשון הסדרות וההגדרה עם ϵ-δ.

יהי נתון $\epsilon > 0$. נניח שאין δ שעבורו $|f(x) - b| \le \epsilon$ לכל x בתחום הפונקציה המקיים $a - \delta < x < a$.

אז לכל $c < a$, יש נקודה $c < x < a$ בתחום הפונקציה כך ש $|f(x) - b| > \epsilon$ (נפעיל את ההנחה על $\delta := a - c$).

נגדיר סידרה עולה ממש x_n באינדוקציה על n:

ניקח $a - \frac{1}{1} < x_1 < a$ כך ש $|f(x_1) - b| \ge \epsilon$.

לכל $n > 1$, ניקח $\max\left\{a - \frac{1}{n}, x_{n-1}\right\} < x_n < a$ כך ש $|f(x_n) - b| \ge \epsilon$.

הסידרה (x_n) עולה ממש ומתכנסת לנקודה a, אבל $|f(x_n) - b| \ge \epsilon$, בסתירה לנתון. $\blacksquare$

2 הגדרה כללית של פונקציה רציפה

לשם נוחיות, נכליל את ההגדרה של "פונקציה רציפה".

הגדרה 2.1 פונקציה $f\colon X \to Y$ היא **רציפה** אם לכל סידרה $x_n \longrightarrow a$ בקבוצה X מתקיים $f(x_n) \longrightarrow f(a)$.

משמעות ההגדרה היא שהפונקציה f רציפה בכל הנקודות $a \in X$ שהן נקודות הצטברות של הקבוצה X. אין דרישה מנקודות שאינן נקודות הצטברות של הקבוצה X.

3 המשפט

למה 3.1 תהי $f\colon X\to Y$ פונקציה עולה ממש, רציפה ועל. לכל נקודה $x\in X$ שהיא נקודת הצטברות מימין/משמאל של הקבוצה X, הנקודה $y:=f(x)\in Y$ היא נקודת הצטברות מימין/משמאל של הקבוצה Y (בהתאמה).

הוכחה: (עבור גבול משמאל) נניח שיש סידרה עולה ממש ב X, $x_n\longrightarrow x:=f^{-1}(y)$. מרציפות הפונקציה f, $Y\ni f(x_n)\longrightarrow f(x)=y$, וכיון ש f עולה ממש, $f(x_n)<f(x)=y$ לכל n.

כיון שכל נקודת הצטברות היא נקודת הצטברות מימין או משמאל, יוצא מהלמה שעבור פונקציה עולה ממש ורציפה, התמונה של כל נקודת הצטברות היא נקודת הצטברות. ■

משפט 3.2 תהי $f\colon X\to Y$ פונקציה עולה ממש, רציפה ועל. אזי הפונקציה $f^{-1}\colon Y\to X$ עולה ממש ורציפה.

הוכחה: ההוכחה שהפונקציה f^{-1} עולה ממש זהה (גם עולה ממש, וגם ממש זהה :)) למה שראינו בכתה. נראה רציפות על ידי שנראה רציפות מימין/משמאל בכל נקודת הצטברות מימין/משמאל (בהתאמה).

נוכיח רציפות משמאל (הוכחת רציפות מימין דומה).

נניח $y_n\to y$ סידרה עולה ממש ב Y. נסמן $x_n:=f^{-1}(y_n)$, $x:=f^{-1}(y)$. עלינו להוכיח ש $x_n\longrightarrow x$.

כיון שהפונקציה f^{-1} עולה ממש, הסידרה x_n עולה וחסומה על ידי הנקודה x. לכן היא מתכנסת, נאמר $x_n\longrightarrow c$. כיון ש $x_n\le x$ לכל n, גם הגבול $c\le x$.

מרציפות הפונקציה f, נקבל $f(c)\longleftarrow f(x_n)=y_n\longrightarrow y=f(x)$, ולכן $f(c)=f(x)$, ולכן $x=c$. לסיכום, $x_n\longrightarrow c=x$. ■

4 יישום לפונקציית הלוגריתם

למה 4.1 הפונקציה $e^x\colon\mathbb{R}\to(0,\infty)$ היא רציפה, עולה ממש, ועל.

הוכחה: רציפות נובעת מתכונת חזקות של מספרים ממשיים: אם $x_n\longrightarrow x$ אז $a^{x_n}\longrightarrow a^x$ לכל $0<a$. בפרט זה נכון עבור $a:=e$.

ההוכחה שהפונקציה עולה (משום ש $1<e$) היא בעזרת הגדרת חזקות של מספרים ממשיים, ומושארת כתרגיל.

הפונקציה על: $1<e$, ולכן $e^n\longrightarrow\infty$ (סידרה הנדסית עם מנה גדולה מ 1). לכן, $e^{-n}=\frac{1}{e^n}\longrightarrow 0$.

לכן, לכל $0<y<\infty$, לבסוף $e^{-\frac{1}{n}}<y<e^n$. כיון שהפונקציה e^x רציפה, ממשפט ערך הביניים הפונקציה מקבלת את הערך y. ■

מסקנה 4.2 הפונקציה ההפוכה $\log\colon(0,\infty)\to\mathbb{R}$ של הפונקציה e^x היא רציפה, עולה ממש, ועל.

פתרון תרגיל 11

1. בעמוד הבא.

2. **א.** מהנתון, לכל $\varepsilon > 0$ ובפרט עבור $\varepsilon = 0.5$ מתקיים: קיים N ממשי חיובי כך שלכל $x > N$:
$|f(x) + 1| < 0.5$ ובפרט, $-1.5 < f(x) < -0.5$. מכיוון ש f רציפה בקטע הסגור [0,N] היא מקבלת בו מקסימום ונסמנו M. נשים לב שכיוון ש- f שלילית גם M<0 ולכן:
$\sup\{f(x): x \in [0,\infty]\} \leq \max\{M, -0.5\} < 0$.

ב. נסמן $h(x) = f(x) - f(x + \frac{a}{2})$. $f(x), f(x + \frac{a}{2})$ רציפות ב- $[0, \frac{a}{2}]$ ולכן גם h רציפה בקטע זה. נשים לב: $h\left(\frac{a}{2}\right) = f\left(\frac{a}{2}\right) - f(a) = f\left(\frac{a}{2}\right) - f(0)$, $h(0) = f(0) - f\left(\frac{a}{2}\right)$.
ולכן $h(0) = -h(\frac{a}{2})$. אם $h(0) = 0$ אז סיימנו. אחרת בהכרח 0 נמצא בין $h(0), h(\frac{a}{2})$ (כי הם שוני סימן) ולכן ממשפט ערך הביניים קיימת נקודה $c \in [0, \frac{a}{2}]$ כך ש $h(c) = 0$