

תרגיל 4

1. חשבו את הגבולות של הסדרות הבאות:

$$א. a_n = \frac{1}{n} \sin(n!)$$

$$ב. a_n = \frac{(n+1)! - n!}{(n+1)! + n!}$$

$$ג. a_n = \frac{3^{n-1}}{2^n}$$

$$ד. a_n = \frac{3^n}{2^{n^2}}$$

$$ה. a_n = n(\sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 + n - 1})$$

$$ו. a_n = \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$$

$$ז. a_n = \frac{n^3}{(n^2+1)(3n+1)} + \frac{3^n+2^n}{3^n-2^n}$$

$$ח. a_n = \frac{7}{(n+3)(\sqrt{n^2+3}-n)}$$

2. חשבו את הגבולות של הסדרות הבאות:

$$א. a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2}$$

$$ב. a_n = \frac{1 \cdot \sin(1) + 2 \cdot \sin(2) + \dots + n \cdot \sin(n)}{n^3}$$

$$ג. a_n = \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \dots \cdot \sqrt[2^n]{2}$$

$$ד. a_n = \frac{7 + \cos(2n)}{2 - \sin(n)} + \frac{5 - 2n \sin(n)}{n}$$

3. הוכיחו לפי הגדרה:

$$א. \text{אם } \lim a_n = \infty \text{ אז } \lim \sqrt{a_n} = \infty$$

$$ב. \text{אם } \lim a_n = \infty \text{ ו-} C \text{ מספר ממשי חיובי אז } \lim C a_n = \infty$$

$$ג. \log_2(\log_2(n)) \rightarrow \infty$$

$$ד. \text{אם } a_n \rightarrow \infty \text{ אז } -a_n \rightarrow -\infty$$

- א. אם $a_n \rightarrow \infty$ ו- $b_n \rightarrow \infty$ אז $a_n + b_n \rightarrow \infty$.
- ב. אם $|a_n| \rightarrow \infty$ ו- $|b_n| \rightarrow \infty$ אז $|a_n + b_n| \rightarrow \infty$.
- ג. אם $|a_n| \rightarrow \infty$ ו- $|b_n| \rightarrow \infty$ אז $|a_n b_n| \rightarrow \infty$.
- ד. אם $a_n \rightarrow \infty$ ו- b_n מתכנסת במובן הצר (כלומר מתכנסת למספר ממשי), אז $a_n b_n$ מתכנסת במובן הרחב (כלומר מתכנסת למספר ממשי או ל- $\pm\infty$).

ה. אם $a_n \rightarrow \infty$ ו- $b_n \rightarrow 0$ אז $\frac{b_n}{a_n} \rightarrow 0$.

- ו. אם $a_n \rightarrow \infty$ ו- $b_n \rightarrow 0$, וקיים N טבעי כך שלכל $n > N$ טבעי מתקיים $b_n \neq 0$ אז $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \infty$.
- ז. אם $a_n \rightarrow \infty$ ו- $b_n \rightarrow 0$, וקיים N טבעי כך שלכל $n > N$ טבעי מתקיים $b_n > 0$ אז $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \infty$.

5. תנו דוגמאות של שתי סדרות $(a_n), (b_n)$ המתכנסות כל אחת מהן ל-0, כך ש-

א. $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ מתכנסת ל-0.

ב. $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ מתכנסת למספר ממשי שאינו 0.

ג. $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ מתכנסת ל- ∞ .

ד. $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ מתכנסת ל- $-\infty$.

ה. $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ לא מתכנסת (גם לא במובן הרחב).