פתרון תרגיל 7 אינפי 4

12 במאי 2015

1. המשטח שלנו נתון ע"י הפרמטריזציה:

$$\phi(\psi,\theta)=(\cos\psi\sin\theta,\sin\psi\sin\theta,\cos\theta)$$

כאשר $\psi\in[0,2\pi],\theta\in[0,\pi]$.

וקטורי הנגזרות יהיו:

$$\phi_\psi=(-\sin\psi\sin\theta,\cos\psi\sin\theta,0),\phi_\theta=(\cos\psi\cos\theta,\sin\psi\cos\theta,-\sin\theta)$$

ולכן:

$$\phi_\psi\times\phi_\theta=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -\sin\psi\sin\theta & \cos\psi\sin\theta & 0 \\ \cos\psi\cos\theta & \sin\psi\cos\theta & -\sin\theta \end{vmatrix}=i\cdot(-\cos\psi\sin^2\theta)-j\cdot(\sin\psi\sin^2\theta)+k\cdot(-\sin\theta\cos\theta)$$

כלומר $\phi_\psi\times\phi_\theta=(-\cos\psi\sin^2\theta,-\sin\psi\sin^2\theta,-\sin\theta\cos\theta)$. כעת:

$$F(\phi(\psi,\theta))=F(\cos\psi\sin\theta,\sin\psi\sin\theta,\cos\theta)=(-\sin\psi\sin\theta,\cos\psi\sin\theta,-\cos\theta)$$

ולכן האינטגרל יהיה:

$$\iint_S F\cdot\vec{n}dS=\iint_D(-\sin\psi\sin\theta,\cos\psi\sin\theta,-\cos\theta)\cdot(-\cos\psi\sin^2\theta,-\sin\psi\sin^2\theta,-\sin\theta\cos\theta)d\psi d\theta$$

$$= \iint\limits_D \cos\psi \sin\psi \sin^3\theta - \sin\psi \cos\psi \sin^3\theta + \sin\theta \cos^2\theta d\psi d\theta = \iint\limits_D \sin\theta \cos^2\theta d\psi d\theta$$

התחום D הוא $D = [0, 2\pi] \times [0, \pi]$ ולכן:

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin\theta \cos^2\theta d\psi d\theta = 2\pi \cdot \frac{\cos^3\theta}{3}|_0^{\pi} = -\frac{4\pi}{3}$$

ומכיוון שהנורמל הוא פנימי נחליף את הסימן ונקבל:

$$\iint\limits_S F \cdot \vec{n} dS = \frac{4\pi}{3}$$

2. הפרמטריזציה היא:

$$\phi(u, v) = (a\cos u \cos v, b\sin u \cos v, c\sin v)$$

וקטורי הנגזרות הם:

$$\phi_u = (-a\sin u \cos v, b\cos u \cos v, 0), \phi_v = (-a\cos u \sin v, -b\sin u \sin v, c\cos v)$$

ולכן:

$$\phi_u \times \phi_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -a\sin u \cos v & b\cos u \cos v & 0 \\ -a\cos u \sin v & -b\sin u \sin v & c\cos v \end{vmatrix} =$$

$$i \cdot (bc\cos u \cos^2 v) - j \cdot (-ac\sin u \cos^2 v) + k \cdot (ab\sin v \cos v)$$

כלומר $\phi_u \times \phi_v = (bc\cos u\cos^2 v, ac\sin u\cos^2 v, ab\sin v\cos v)$. כעת:

$$F(\phi(u,v)) = F(a\cos u\cos v, b\sin u\cos v, c\sin v) = (\frac{1}{a\cos u\cos v}, \frac{1}{b\sin u\cos v}, \frac{1}{c\sin v})$$

ולכן האינטגרל יהיה:

$$\iint\limits_S F\cdot\vec{n}dS = \iint\limits_D (\frac{1}{a\cos u\cos v}, \frac{1}{b\sin u\cos v}, \frac{1}{c\sin v})\cdot(bc\cos u\cos^2 v, ac\sin u\cos^2 v, ab\sin v\cos v)dudv =$$

$$\iint\limits_D (\frac{bc\cos v}{a} + \frac{ac\cos v}{b} + \frac{ab\cos v}{c})dudv$$

התחום D הוא $D = [0,1]\times[0,\frac{\pi}{2}]$ ולכן:

$$= \int\limits_0^1 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c})\cos v dudv = (\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c})\cdot \sin v|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c}$$

3. פרמטריזציה של המשטח תהיה:

$$\phi(\psi,\theta) = (a\cos\psi\sin\theta, a\sin\psi\sin\theta, a\cos\theta)$$

כאשר $\psi \in [0,2\pi], \theta \in [0,\pi]$.

וקטורי הנגזרות יהיו:

$$\phi_\psi = (-a\sin\psi\sin\theta, a\cos\psi\sin\theta, 0), \phi_\theta = (a\cos\psi\cos\theta, a\sin\psi\cos\theta, -a\sin\theta)$$

ולכן:

$$\phi_\psi \times \phi_\theta = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -a\sin\psi\sin\theta & a\cos\psi\sin\theta & 0 \\ a\cos\psi\cos\theta & a\sin\psi\cos\theta & -a\sin\theta \end{vmatrix} =$$

$$i \cdot (-a^2 \cos\psi \sin^2\theta) - j \cdot (a^2 \sin\psi \sin^2\theta) + k \cdot (-a^2 \sin\theta \cos\theta)$$

כלומר $\phi_\psi \times \phi_\theta = (-a^2 \cos\psi \sin^2\theta, -a^2 \sin\psi \sin^2\theta, -a^2 \sin\theta \cos\theta)$. כעת:

$$F(\phi(\psi,\theta)) = F(a\cos\psi \sin\theta, a \sin\psi \sin\theta, a\cos\theta) = (2a \cos\psi \sin\theta, 0, 0)$$

והאינטגרל יהיה:

$$\iint\limits_S F \cdot \vec{n} dS = \iint\limits_D (2a\cos\psi\sin\theta, 0, 0) \cdot (-a^2 \cos\psi \sin^2\theta, -a^2 \sin\psi \sin^2\theta, -a^2 \sin\theta\cos\theta) d\psi d\theta =$$

$$= \iint\limits_D -2a^3 \cos^2\psi \sin^3\theta d\psi d\theta$$

התחום D הוא $D = [0, 2\pi] \times [0, \pi]$ ולכן:

$$= -2a^3 \cdot \int\limits_0^\pi \int\limits_0^{2\pi} \cos^2\psi \sin^3\theta d\psi d\theta =$$

נחשב את האינטגרלים:

$$\int\limits_0^{2\pi} \cos^2\psi d\psi = \int\limits_0^{2\pi} (\frac{1+\cos 2\psi}{2}) d\psi = \frac{1}{2}(\psi + \frac{\sin 2\psi}{2})|_0^{2\pi} = \pi$$

$$\int\limits_0^\pi \sin^3\theta d\theta = \int\limits_0^\pi (1-\cos^2\theta)\sin\theta d\theta = -\cos\theta|_0^\pi + \frac{\cos^3\theta}{3}|_0^\pi = -\frac{4}{3}$$

ולכן הערך הוא $-2a^3 \cdot \pi \cdot (-\frac{4}{3})$. הנורמל פנימי ולכן יש להפוך את הסימן, ובסה"כ נקבל:

$$-\frac{8a^3\pi}{3}$$