תרגול 3 - אינפי 2

18 במרץ 2018

שיטת האינגרציה בהצבה

$\int f(g(x))g^{'}(x)dx = \int f(t)dt = F(g(x)) + C$

כאשר השתמשנו בהצבה:

$t = g(x)$, $dt = g^{'}(x)dx$

דוגמאות:

1) $\int sin^2(x)cos(x)dx$

$t = sin(x)$, $dt = cos(x)dx$

$\int sin^2(x)cos(x)dx = \int t^3dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{sin^3(x)}{3} + C$

2) $\int 2x \cdot e^{x^2}dx$

$t = x^2, dt = 2xdx$

ולכן $\int e^t dt = e^t + C = e^{x^2} + C$

3) $\int \frac{cos(x)dx}{cos^2(x)sin^2(x)}dx = \frac{1}{4}\int \frac{cos(2x)dx}{sin^2(2x)} = \frac{1}{4}\int \frac{2dt}{t^2} = \frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{t}) + C =$

$= \frac{1}{4}\int \frac{2dt}{t^2} = \frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{t}) + C = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{sin(2x)} + C$

4) $\int \frac{x}{1+x^2}dx = \int \frac{dt}{2t} = \frac{1}{2}ln|t| + C = \frac{1}{2}ln(1+x^2) + C$

$t = 1 + x^2$, $dt = 2xdx$

5) $\int \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{\sqrt{1-(\frac{x}{4})^2}}$

נציב $t = \frac{x}{4}$, $dt = \frac{dx}{4}$ נציב את הכל באינגרל ונקבל:

$\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = arcsin(t) + C = arcsin(\frac{x}{4}) + C$

6) $\int \frac{12t^2}{(t^3+1)^2}dt$

$u = t^3 + 1, du = 3t^2dt$

$\int \frac{12t^2dt}{(t^3+1)^2} = 12\int \frac{du}{3u^2} = 4\int \frac{du}{u^2} = -4\frac{1}{u} + C = -\frac{4}{t^3+1} + C$

7) $\int arctan(x)dx$

$f' = 1$,$g = arctan(x)$

$f = x$,$g' = \frac{1}{1+x^2}$

$$\int arctan(x)dx = x \cdot arctan(x) - \int \frac{x}{1+x^2}dx = arctan(x) - \frac{1}{2}ln(1+x^2) + C$$

8) $\int x \cdot arctan(x^2)dx$

$du = 2xdx$,$u = x^2$

$$\int x \cdot arctan(x^2)dx = \frac{1}{2}\int arctan(u)du = \frac{1}{2}\left(arctan(u) - \frac{1}{2}ln(1+u^2)\right) + C =$$

$$= \frac{1}{2}\left(arctan(x^2) - \frac{1}{2}ln(1+x^4)\right) + C$$

9) $\int x^3 sin(x^2)dx = \int xsin(x^2)x^2dx$

$dt = 2xdx$,$t = x^2$

$$\int x^2 \cdot sin(x^2)xdx = \frac{1}{2}\int tsin(t)dt = -t \cdot cos(t) + sin(t) + C = -x^2 \cdot cos(x^2) + sin(x^2) + C$$

10) $\int e^{sin(x)}sin(2x)dx = \int 2e^{sin(x)}sin(x)cos(x)dx$

$dt = cos(x)dx$,$t = sin(x)$

$$\int 2e^{sin(x)}sin(x)cos(x)dx = 2\int e^t \cdot tdt = 2(e^t \cdot t - e^t) + C =$$

$$= 2(e^{sin(x)}sin(x) - e^{sin(x)}) + C$$

11) $\int \frac{e^{tan(x)}sin(x)dx}{cos^3(x)} = \int \frac{e^{tan(x)}tan(x)}{cos^2(x)}dx$

$dt = \frac{dx}{cos^2(x)}$,$t = tan(x)$

$$\int e^t \cdot tdt = t \cdot e^t - e^t + C = e^{tan(x)} \cdot tan(x) - e^{tan(x)} + C$$

12) $\int e^{2x+e^x}dx = \int e^{2ln(t)} \cdot e^t \cdot \frac{dt}{t} = \int t^2 \cdot e^t \cdot \frac{dt}{t} = \int t \cdot e^t dt = t \cdot e^t - e^t + C =$

$$= e^x \cdot e^{e^x} - e^{e^x} + C$$

הסבר: $t = e^x$, $x = ln(t)$, $dx = \frac{dt}{t}$

13) $\int x \cdot \sqrt[6]{2x+3}dx$

$x = \frac{t^6-3}{2}$,$t = \sqrt[6]{2x+3}$,$t^6 = 2x+3$

$dx = 6t^5dt$

$$\int x \cdot \sqrt[6]{2x+3}dx = \int \frac{(t^6-3)}{2} \cdot t \cdot 3 \cdot t^5 dt = 3\int(t^{12} - 3t^6)dt = 3\left(\frac{t^{13}}{13} - \frac{3}{7}t^7\right) + C =$$

$$3 \cdot \left(\frac{(\sqrt[6]{2x+3})^{13}}{13} - \frac{3}{7}(\sqrt[6]{2x+3})^7\right) + C$$

14) $\int \frac{2}{(2-x)^2} \cdot \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}dx$

$t^3 = \frac{2-x}{2+x}$, $x = 2 \cdot \frac{1-t^3}{1+t^3}$, $dx = 2 \cdot \frac{(-3t^2(t^3+1)-3t^2(1-t^3))}{(t^3+1)^2}dt = -\frac{12t^2dt}{(t^3+1)^2}$

$2-x = 2-\frac{2(1-t^3)}{(1+t^3)} = \frac{4t^3}{t^3+1}$

$\int \frac{2}{(2-x)^2} \cdot \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}dx = \int \frac{2(t^3+1)^2}{16t^6} \cdot (-\frac{12t^2}{(t^3+1)^2})dt = -\int \frac{24t^3}{16t^6}dt = -\frac{3}{2}\int \frac{dt}{t^3} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{t^2} + C$

$= \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{2+x}{2-x}\right)^{\frac{2}{3}} + C$

15) $\int \sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}}dx$

$t^2 = \frac{e^x-1}{e^2+1}$, ולכן $e^x = \frac{t^2+1}{1-t^2}$ $x = ln(t^2+1) - ln(1-t^2) = ln(t^2+1) - ln(1-t) - ln(1+t)$

$dx = \left(\frac{2t}{t^2+1} + \frac{1}{1-t} - \frac{1}{1+t}\right)dt$

$\int \sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}}dx = \int t \cdot \left(\frac{2t}{t^2+1} + \frac{1}{1-t} - \frac{1}{1+t}\right)dt = \int \frac{2t^2}{t^2+1}dx + \int \frac{tdt}{1-t} - \int \frac{tdt}{1+t} =$

$= 2\int \frac{t^2+1-1}{t^2+1}dt - \int \frac{1-t+1}{1-t}dt - \int \frac{1+t-1}{1+t}dt =$

$= 2\left[\int dt - \int \frac{dt}{t^2+1}\right] - \left[\int dt + \int \frac{dt}{1-t}\right] - \left[\int dt + \int \frac{dt}{1+t}\right] =$

$= 2\left[t - arctan(x)\right] - \left[t - ln|1-t|\right] - \left[t + ln|1+t|\right] =$

$= ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right| - 2arctan(t) + C = ln\left|\frac{1-\sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}}}{1+\sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}}}\right| - 2arctan(\sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}}) + C$

16) $\int \frac{6}{\sqrt{7-4x^2+4x}}dx = 6\int \frac{dx}{8-(2x-1)^2} = \frac{6}{\sqrt{8}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{2x-1}{\sqrt{8}}\right)^2}} = 3\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = 3 \cdot arcsin(t) + C$

$= 3 \cdot arcsin(\frac{2x-1}{\sqrt{8}}) + C$

הסבר:

$t = \frac{2x-1}{\sqrt{8}}$, $dt = \frac{2}{\sqrt{8}}dx$

17) $\int x^3 \cdot \sqrt{9-x^2}dx = \int x^2 \cdot \sqrt{9-x^2} \cdot xdx$

$t = 9-x^2$, $tdt = -xdx$

$\int x^2 \cdot \sqrt{9-x^2}xdx = \int (9-t^2)t(-tdt) = -\int 9t^2dt + \int t^4dt =$

$= -3t^3 + \frac{1}{5}t^5 + C = -3(\sqrt{9-x^2})^3 + \frac{1}{5}(\sqrt{9-x^2})^5 + C$

18) $\int \frac{\sqrt{x}dx}{x^{\frac{3}{2}}+1}$

$x = t^2$, $dx = 2tdt$, $t = \sqrt{x}$

$\int \frac{\sqrt{x}}{x^{\frac{3}{2}}+1}dx = \int \frac{t}{t^3+1} \cdot 2tdt = \int \frac{2t^2}{t^3+1}dt = \frac{2}{3}\int \frac{du}{u} = \frac{2}{3}ln|u| + C =$

$$= \frac{2}{3}ln|t^3+1|+C = \frac{2}{3}\cdot ln|x^{\frac{3}{2}}+1|+C$$

19) $\int \frac{sin(x)\cdot cos(x)}{a^2cos^2(x)+b^2sin^2(x)}dx = \int \frac{sin(x)\cdot cos(x)dx}{a^2(1-sin^2(x))+b^2sin^2(x)} = \int \frac{sin(x)cos(x)dx}{a^2+(b^2-a^2)sin^2(x)} =$

$t = sin(x)$, $dt = cos(x)dx$

$$= \int \frac{tdt}{a^2+(b^2-a^2)t^2} = \frac{1}{2(b^2-a^2)}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2(b^2-a^2)}ln|u|+C =$$

$$= \frac{1}{2(b^2-a^2)}ln|(b^2-a^2)t^2+a^2|+C = \frac{1}{2(b^2-a^2)}ln|(b^2-a^2)sin^2(x)+a^2|+C =$$

הסבר:

$u=(b^2-a^2)t^2+a^2$, $du = 2(b^2-a^2)tdt$ ולכן $\frac{du}{2(b^2-a^2)} = tdt$

20) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})} = \int \frac{6t^5dt}{t^3(1+t^3)} = 6\int \frac{t^2+1-1}{t^2+1}dt = 6\left[\int dt - \int \frac{dt}{t^2+1}\right] =$

$$= 6t - 6\cdot arctan(t)+C = 6\cdot\sqrt[6]{x} - arctan(\sqrt[6]{x})+C$$

21) $\int max(x,x^2)dx$

$$max(x,x^2) = \begin{cases} x & 0<x\le 1 \\ x^2 & x>1 \text{ or } x\le 0 \end{cases}$$

$$\int max(x,x^2)dx = \begin{cases} \frac{x^3}{3}+C_1, & x<0 \\ \frac{x^3}{3}+C_2, & x>1 \\ \frac{x^2}{2}+C_3, & 0\le x\le 1 \end{cases}$$

ולכן היא מהווה קדומה לפונקציה המקורית שלנו עבור $x\neq 0,1$

כעת נבדוק תנאי על הקבועים כך ש־f תהיה קדומה לפונקציה המקורית על כל הישר.

אם נדרוש רציפות נקבל כי:

$lim_{x\to 1^+}f(x) = lim_{x\to 1^-}f(x)$ ולכן $\frac{1}{3}+C_2 = \frac{1}{2}+C_3$

$lim_{x\to 0^+}f(x) = lim_{x\to 0^-}f(x)$ ולכן $C_1 = C_3$

והפתרון של שתי המשוואות האלה יניב:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3}+C & x<0 \\ \frac{x^3}{3}+C+\frac{1}{6} & x>1 \\ \frac{x^2}{2}+C & 0\le x\le 1 \end{cases}$$

קיבלנו פונקציה רציפה שמקיימת

$$lim_{x\to 0^+}f'(x) = lim_{x\to 0^-}f'(x)$$

וגם $lim_{x\to 1^+}f'(x) = lim_{x\to 1^-}f'(x)$

ולכן היא גזירה גם בנקודות התפר האלו ולכן גזירה על כל הישר ונגזרתה היא הפונקציה שממנה התחלנו.

22) תהי $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, פונקציה מונוטונית ממש, גזירה ותהי F פונקציה קדומה של f כלומר $F^{'}=f$

הוכיחו ש- $\int f^{-1}(x)dx = x\cdot f^{-1}(x) - F(f^{-1}(x))$

פתרון:

$f^{'}=1$, $g=f^{-1}(x)$

$f=x$, $g^{'}=\left(f^{-1}(x)\right)^{'}$

$$\int f^{-1}(x)dx = x\cdot f^{-1}(x) - \int x\left(f^{-1}(x)\right)^{'}dx = x\cdot f^{-1}(x) - \int f\left(f^{-1}(x)\right)\left(f^{-1}(x)\right)dx =$$

$$= x\cdot f^{-1}(x) - \int f(u)du = x\cdot f^{-1}(x) - F(u) + C = x\cdot f^{-1}(x) - F(f^{-1}(x)) + C$$

השלמה לריבוע

בהינתן פולינום Ax^2+Bx+C נרצה להציג אותו בצורה הבאה:

$A(x+s)^2+t$ כאשר s,t הם מספרים ממשיים.

נבצע השלמה לריבוע בשלבים הבאים:

מקרה 1: נניח ש- $A=1$ כלומר הפולינום שלנו הוא x^2+Bx+C

אזי $x^2+2\cdot\frac{1}{2}Bx+\frac{B^2}{4}-\frac{B^2}{4}+C=\left(x+\frac{B}{2}\right)^2+C-\frac{B^2}{4}$

מקרה שני: $A\neq 1$ ולכן

$$A\left(x^2+\frac{B}{A}x\right)+C=A\left(x^2+2\cdot\frac{B}{2A}x+\frac{B^2}{4A^2}-\frac{B^2}{4A^2}\right)+C=A\left(x+\frac{B}{2A}\right)^2+C-\frac{B^2}{4A}$$

דוגמאות:

1) $4x^2+5x+1=4\left(x+\frac{5}{8}\right)^2+1-\frac{25}{16}=4(x+\frac{5}{8})^2-\frac{9}{16}$

2) $x^2+x+\frac{5}{4}=x^2+2\cdot\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{5}{4}=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1$

פירוק לשברים חלקיים

פירוק לשברים חלקיים הוא פעולה הפוכה למציאת מכנה משותף

בהינתן פונקציה רציונאלית: $\frac{P(x)}{Q(x)}$ נבצע פירוק לשברים חלקיים בשלבים הבאים:

1) אם מעלת המונה גדולה או שווה למעלת המכנה נחלק את המונה במכנה ונקבל את הביטוי הבא:

$\frac{P(x)}{Q(x)} = \widetilde{Q(x)} + \frac{R(x)}{Q(x)}$ כאשר $\widetilde{Q(x)}$ הוא פולינום ו־$deg(R(x)) < deg(Q(x))$

אם מעלה של P קטנה מהמעלה של Q נמשיך לשלב 2:

2) נפרק את Q לגורמים אי פריקים:

$$Q(x) = A\left(x-a_1\right)^{k_1}\left(x-a_2\right)^{k_2}....\left(x-a_n\right)^{k_n}\left(x^2+b_1x+c_1\right)^{s_1}\left(x^2+b_2x+c_2\right)^{s_2}.....\left(x^2+b_mx+c_m\right)^{s_m} =$$

$$R_1\left(x\right)^{k_1}...R_n\left(x\right)^{k_n}\cdot M_1^{s_1}...M_m^{s_m}$$

כאשר M_j,R_i הם פלינומים אי פריקים ממעלה 1 ו־2 בהתאמה.

3) כעט לכל חזקה של R_i, M_j יש שבר חלקי.

נציב את $\frac{P(x)}{Q(x)}$ בצורה הבאה:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{R_1} + \frac{A_2}{R_1^2} + ... + \frac{A_{k_n}}{R_1^{k_n}} + ... + \frac{B_1x+C_1}{M_1} + \frac{B_2x+C_2}{M_1^2} + ... + \frac{B_{s_1}x+C_{s_1}}{M_1^{s_1}} + ...$$

4) מוצאים את הערכים של A_i, B_j, C_k

דוגמאות:

1) $\frac{1}{x^3-x^2+4x-4}$

המעלה של המונה קטנה מהמעלה של המכנה ולכן נלך לשלב 2

$$x^3-x^2+4x-4 = (x-1)\left(x^2+4\right)$$

מפרקים לשברים חלקיים:

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$$

$$1 = A\left(x^2+4\right) + (Bx+C)(x-1)$$

נעשה כינוס של איברים דומים ונקבל:

$$1 = (A+B)x^2 + (C-B)x + 4A - C$$

נשווה בין המקדמים ונקבל מערכת משוואות הבאה:

$$A+B=0$$

$$C-B=0$$

$$4A-C=1$$

ולכן $A=\frac{1}{5}$, $B=-\frac{1}{5}$, $C=-\frac{1}{5}$

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+4)} = \frac{1}{5(x-1)} - \frac{x+1}{5(x^2+4)}$$

2) $\frac{x+3}{x^2-3x-40}$

מעלת המונה קטנה מהמעלה של המכנה ולכן נלך לשלב 2:

$$x^2-3x-40=(x-8)(x+5)$$

$$\frac{x+3}{x^2-3x-40}=\frac{A}{x-8}+\frac{B}{x+5}$$

$$x+3=A(x+5)+B(x-8)$$

נציב $x=-5$ ונקבל: $-2=-13B$ ולכן $B=\frac{2}{13}$

נציב $x=8$ ונקבל: $11=A\cdot 13$ ולכן $A=\frac{11}{13}$

3) $\frac{10x^2+12x+20}{x^3-8}$

$$x^3-8=(x-2)\left(x^2+2x+4\right)$$

$$\frac{10x^2+12x+20}{x^3-8}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+4}$$

$$10x^2+12x+20=A\left(x^2+2x+4\right)+B(x-2)$$

$x=2$: $12A=84$ ולכן $A=7$

$x=0$: $20=28-2C$ ולכן $C=4$

$x=1$: $42=45-B$ ולכן $B=3$

ולכן $\frac{10x^2+12x+20}{x^3-8}=\frac{7}{x-2}+\frac{3x+4}{x^2+2x+4}$

4) $\frac{10x^2-63x+29}{x^3-11x^2+40x-48}$

$$x^3-11x^2+40x-48=(x-3)(x-4)^2$$

$$\frac{10x^2-63x+29}{x^3-11x^2+40x-48}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-4}+\frac{C}{(x-4)^2}$$

$$10x^2-63x+29=A(x-4)^2+B(x-4)(x-3)+C(x-3)$$

$A=-70$, $B=$, $C=-63$