בוחן אמצע אלגברה לינארית 2

6.5.2015

מספר קורס: 88-113
מרצה:רון עדין
זמן הבחינה:שעה וחצי

שאלה 1

נתונה המטריצה $A_n = \begin{pmatrix} 2 & 5 & \ldots & 5 \\ 5 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 2 & 5 \\ 5 & \ldots & \ldots & 2 \end{pmatrix} \in M_n(Z_7)$

א) מצאו את $det(A_n)$.
ב) מצאו את $det(A_{79})$. התשובה צריכה להיות איבר ב-Z_7.
העזרו במשפט הקטן של פרמה: לכל p ראשוני ולכל a שלם, מתקיים $a^p \equiv a (mod\, p)$.
ג) לאילו ערכי n המטריצה A_n אינה הפיכה.

שאלה 2

הוכח $A \cdot adj(A) = det(A) \cdot I$

שאלה 3

נתונה המטריצה $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

א. מצאו את הערכים העצמיים והמרחבים העצמיים.
ב. מצאו מטריצה אלכסונית D ומטריצה הפיכה P כך ש-$D = P^{-1} \cdot A \cdot P$. (נמקו מדוע קיימת כזו).
ג. חשבו את A^{10}.

פתרון בוחן לינארית סמסטר ב (רון עדין)

6 במאי 2015

שאלה 1

סעיף א

מתכונות מודולו 7, קל להגיע לממטריצה הבאה ע״י כפילת כל שורה בשלוש נקבל את המטריצה $\begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 6 & \vdots & \vdots & 1 \\ 1 & \vdots & \ddots & \vdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 6 \end{pmatrix}$, כלומר ערך הדטרמיננטה של המטריצה המקורית שווה

, נחבר כל אחת מהשורות לשורה הראשונה, נקבל, $\frac{1}{3^n}\begin{vmatrix} (6+n-1) & (6+n-1) & (6+n-1) & \cdots & (6+n-1) \\ 1 & 6 & \vdots & \vdots & 1 \\ 1 & \vdots & \ddots & \vdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 6 \end{vmatrix}$,

נוציא את הקבוע מהשורה הראשונה מה שמוביל ל:

$\frac{(6+n-1)}{3^n}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 6 & \vdots & \vdots & 1 \\ 1 & \vdots & \ddots & \vdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 6 \end{vmatrix}$, עכשיו נחסר כל אחת מה־$(n-1)$שורות מהשורה

הראשונה, מה שמוביל לדטרמיננטה: $\frac{(6+n-1)}{3^n}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 5 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 5 & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 5 \end{vmatrix}$, שכמובן מטריצה

משולשית העליונה. לסיכום ערך הדטרמיננטה הוא $(5+n)\frac{5^{n-1}}{3^n}$.

סעיף ב+ג

ד. מתכונות מודולו 7 הדטרמיננטה שווה אפס כי $84 \equiv_7 0$.

ג. הדטרמיננטה שווה לאפס כאשר

$5(5+n)=7m$

$25+5n=7m$

$5n+4=7n$

כלומר כאשר $7|(5n+4) \Leftarrow 5n\equiv 3 \mod 7 \Leftarrow n\equiv 2 \mod 7$.

בס"ד

פתרון נוסף לשאלה ~~1~~ 1 סעיף א':

$$|A_n| = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 5 & \cdots & 5 \\ 5 & 2 & 5 & \cdots & 5 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 5 & 5 & 5 & \cdots & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow[i \neq 1]{R_1 + \sum R_i \to R_1} \begin{vmatrix} 5(n-1)+2 & 5(n-1)+2 & \cdots & 5(n-1)+2 \\ 5 & 2 & \cdots & 5 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 5 & 5 & \cdots & 2 \end{vmatrix}$$

נוסיף את כל השורות לשורה הראשונה

$$= \big(5(n-1)+2\big) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 5 & 2 & 5 & \cdots & 5 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 5 & 5 & 5 & \cdots & 2 \end{vmatrix}$$

(מוציאים גורם משותף מהשורה הראשונה)

$$\xrightarrow[i \neq 1]{R_i + 2R_1 \to R_i} = \big(5(n-1)+2\big) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 4 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 4 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & - & - & - & 4 \end{vmatrix}$$

נוסיף לכל השורות את $2R_1$ (חוץ מהשורה הראשונה)

זוהי: מטריצה משולשית עליונה ולכן נכפול את איברי האלכסון.

לכן הדטרמיננטה המתקבלת שווה ל:

$$= \big(5(n-1)+2\big) \cdot 4^{n-1} =$$

$$= (5n-3) \cdot 4^{n-1} =$$

$$= (5n+4) \cdot 4^{n-1}.$$

בס"ד

פתרון שאלה 3:

3. $A=\begin{pmatrix}2&0&3\\0&3&0\\1&0&4\end{pmatrix}$

א.

פיתוח לפי שורה I

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&-3\\0&\lambda-3&0\\-1&0&\lambda-4\end{vmatrix}=(\lambda-2)\cdot[(\lambda-3)(\lambda-4)]-3\cdot[0+(\lambda-3)]=$$

$$=(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-4)-3(\lambda-3)=$$

$$=(\lambda-3)[(\lambda-2)(\lambda-4)-3]=$$

$$=(\lambda-3)[\lambda^2-4\lambda-2\lambda+8-3]=$$

$$=(\lambda-3)[\lambda^2-6\lambda+5]=$$

$\lambda^2-6\lambda+5 \to 1,\ 5$

$$=(\lambda-3)(\lambda-1)(\lambda-5)=0$$

$\boxed{\lambda_1=3}$ $\boxed{\lambda_2=1}$ $\boxed{\lambda_3=5}$

עבור $\boxed{\lambda_1=3}$:

$(A-\lambda_1 I)v=0$

$$\begin{pmatrix}-1&0&3\\0&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_3}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\-1&0&3\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_3}\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&0&3\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2+R_1\to R_2}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}x&y&z\end{array}\\\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&4\\0&0&0\end{pmatrix}\end{array}$$

$\Downarrow$

$x+z=0\Rightarrow x=0$

$4z=0\Rightarrow z=0$

נסמן $y=t$ ונקבל:

$V_{\lambda_1=3}=\left\{\begin{pmatrix}0\\t\\0\end{pmatrix}\middle|\, t\in\mathbb{R}\right\}$ ו"ע הוא: $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$.

עבור $\lambda_2=1$:

$(A-\lambda_2 I)v=0$

$$\begin{pmatrix}1&0&3\\0&2&0\\1&0&3\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3-R_1\to R_3}\begin{pmatrix}1&0&3\\0&2&0\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$x+3z=0$ $(x=-3z)$

$2y=0$

נסמן $z=t$

$\Rightarrow$ $z=t$, $y=0$, $x=-3t$

$\Downarrow$

נקבל מ"ע: $V_{\lambda_2=1}=\left\{\begin{pmatrix}-3t\\0\\t\end{pmatrix}\middle|\, t\in\mathbb{R}\right\}$ ו"ע הוא: $\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}$ או $\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix}$

עבור $\lambda_3=5$:

$$\begin{pmatrix}-3&0&3\\0&-2&0\\1&0&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[\frac{R_2}{-2}\to R_2]{R_1\leftrightarrow R_3}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\-3&0&3\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3+3R_1\to R_3}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$x-z=0$

$y=0$

נסמן: $z=t$, $x=t$

$\Downarrow$

המ"ע הוא: $V_{\lambda_3=5}=\left\{\begin{pmatrix}t\\0\\t\end{pmatrix}\middle|\, t\in\mathbb{R}\right\}$ ו"ע הוא: $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

בס"ד

ב.

$$P=\begin{pmatrix}0&-3&1\\1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}3&&0\\&1&\\0&&5\end{pmatrix}$$

קיבלנו 3 ע"ע שונים ולכן המטריצה לכסינה (לפי משפט).

ג.

$$A^{10}=PD^{10}P^{-1}=P\begin{pmatrix}3^{10}&&0\\&1^{10}&\\0&&5^{10}\end{pmatrix}P^{-1}$$

נחשב את P^{-1}:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&-3&1&1&0&0\\1&0&0&0&1&0\\0&1&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&1&0\\0&-3&1&1&0&0\\0&1&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&1&0\\0&1&1&0&0&1\\0&-3&1&1&0&0\end{array}\right)\xrightarrow{R_3+3R_2\to R_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&1&0\\0&1&1&0&0&1\\0&0&4&1&0&3\end{array}\right)\xrightarrow{\frac{R_3}{4}\to R_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&1&0\\0&1&1&0&0&1\\0&0&1&\frac{1}{4}&0&\frac{3}{4}\end{array}\right)\xrightarrow{R_2-R_3\to R_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&1&0\\0&1&0&-\frac{1}{4}&0&\frac{1}{4}\\0&0&1&\frac{1}{4}&0&\frac{3}{4}\end{array}\right)$$

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&0\\-\frac{1}{4}&0&\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}&0&\frac{3}{4}\end{pmatrix}$$

נוודא שזה נכון:

$$\underset{P}{\begin{pmatrix}0&-3&1\\1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}}\underset{P^{-1}}{\begin{pmatrix}0&1&0\\-\frac{1}{4}&0&\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}&0&\frac{3}{4}\end{pmatrix}}=\underset{I}{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}$$

✓