משפט לייבניץ

אם (a_n) יורדת לאפס, אזי:

א) הטור $\sum(-1)^{n+1}a_n$ מתכנס.

ב) שאריות הטור $\sum(-1)^{n+1}a_n$ מקיימות $|r_m| \le a_{m+1}$ וסימנן $(-1)^m$.

הוכחה

נתבונן בסכומים החלקיים של $\sum(-1)^n$:

$S_{2n} = (a_1 - a_2)_{\ge 0} + (a_3 - a_4)_{\ge 0} + \cdots + (a_{2n-1} - a_{2n})_{\ge 0}$ עולה.

$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3)_{\ge 0} - (a_4 - a_5)_{\ge 0} - \cdots - a_{2n_{\ge 0}} \le a_1$.

S_{2n} עולה וחסומה, לכן יש לה גבול $S_{2n} \to s$.

$S_{2n-1} = S_{2n_{\to s}} + a_{2n_{\to 0}} \to s + 0 = s$

$S_{2n-1}, S_{2n} \to s$, $\mathbb{N} = \{2n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{2n-1 : n \in \mathbb{N}\}$ לכן $S_n \to s$.

ב) מהוכחת א׳, $0 \le S_{2n_{\to s}} \le a\_1$. לכן סכום הטור s מקיים $0 \le s \le a_1$. זה נכון לכל טור כבניסוח המשפט. בפרט, זה נכון לזנב הטור $r_m := \sum_{n=m+1}(-1)^{n+1}a_n$ עבור m אי זוגי.

כלומר $0 \le r_m \le a_{m+1}$ זה מוכיח את המקרה ש-m זוגי.

עבור m אי זוגי: $r_m = \sum_{n=m+1}(-1)^{n+1}a_n$

$-r_{m_{\text{אי זוגי}}} = \sum_{n=m+1_{\text{זוגי}}}(-1)^{n+2}a_n$.

ולכן $0 \le -r_m \le a_{m+1}$ ■

הערה

אם במשפט הסדרה (a_n) יורדת ממש, בסעיף ב׳ נקבל $|r_m| < a_{m+1}$

דוג׳

$\sum\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)$ מתכנס: $\frac{1}{n} \searrow 0$, ולכן לייבניץ ישים.

מסעיף ב׳ של המשפט, סכומו מקיים:

$$0.5833.. = S_4 < S = S_4 + r_{4_{>0}} < S_4 + a_5 = S_5 = 0.7833\ldots$$

האומדן עם שגיאה מרבית "a_5". אם ניקח n זוגי יותר גדול, $S_n < S < S_{n+1}$, והשגיאה קטנה מ a_{n+1}.

למשל עבור $n = 1000$, השגיאה קטנה מ - $a_{1001} = \frac{1}{1001}$:

$$0.6936\ldots > s > 0.6926..$$

בשיטות מתקדמות יותר ניתן להוכיח: $\sum\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right) = \ln(2) = 0.6931..$.

הערה

במשפט לייבניץ, לא מספיק ש- $a_n \to 0$ כדי שהטור $\sum(-1)^n a_n$ יתכנס:

$\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}-1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}-1}+\cdots$.

סדרת האיברים בטור ← 0.

אילו הטור התכנס, הוא היה מתכנס גם לאחר הכנסת סוגריים, אבל:

$$\frac{1}{\sqrt{n}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}+1}=\frac{2}{n-1}$$

ולכן $\sum_{n=2}(\frac{1}{\sqrt{n}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}+1})\sum_{n=2}\frac{2}{n-1}=2\sum_{n=1}\frac{1}{n}$ וזהו טור מתבדר.

הגדרה

טור $\sum a_n$ מתכנס בהחלט אם הטור $\sum|a_n|$ מתכנס. אם $\sum|a_n|$ מתבדר אך $\sum a_n$ מתכנס, אומרים שהטור $\sum a_n$ מתכנס בתנאי.

דוגמה

הטור $\sum(\frac{(-1)^{n+1}}{n})$ מתכנס בתנאי. הטור $\sum(\frac{(-1)^{n+1}}{n^2})$ מתכנס בהחלט.

משפט

אם טור $\sum a_n$ מתכנס בהחלט, אז הוא מתכנס.

הוכחה

בעזרת הקריטריון של קושי להתכנסות טורים.

יהי נתון $\epsilon>0$. הטור $\sum|a_n|$ מתכנס, לכן לפי קושי ש N שאחריו

$$|a_{m+1}+\cdots+a_n| \leq_{\text{אשמ}} |a_{m+1}|+|a_{m+2}|+\cdots+|a_n|<\epsilon$$

ולכן קריטריון קושי מתקיים עבור $\sum a_n$ ■

דוגמה

בחן את התכנסות הטור $\sum\left(\frac{a^n}{n}\right)$, לכל a ממשי קבוע.

אם $|a| < 1$ הטור מתכנס בהחלט, ממבחן ההשוואה (לטור הנדסי): $\left|\frac{a^n}{n}\right| = \frac{|a|^n}{n} \le |a|^n$ ו-$\sum|a|^n$ מתכנס.

אם $|a| > 1$, הטור מתבדר. למשל, ממבחן המנה: $\frac{\frac{|a|^{n+1}}{n+1}}{\frac{|a|^n}{n}} = |a| \cdot \frac{n}{n+1} \to |a| > 1$.

במקרה זה, לבסוף $\frac{|a|^n}{n} > 1$ ולכן הגבול של $\frac{|a|^n}{n}$ אינו אפס., לכן $\frac{a^n}{n}$ לא שואף לאפס.

במקרה $|a| = 1$: אם $a = 1$ הטור הוא $\sum\left(\frac{1}{\mathrm{n}}\right) = \infty$, אם $a = -1$ הטור הוא $\sum\left(\frac{(-1)^n}{n}\right) = \underbrace{-\sum\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)}_{\text{מתכנס מלייבניץ}}$ לכן, עבור $a = -1$ הטור מתכנס בתנאי.

הגדרה

טור $\sum a_n$ נקרא **טור חסום** אם יש c כך ש-c > $\left|\sum_{m=1\ to\ n} a_m\right|$ לכל n.

משפט (מבחן דיריכלה)

יהיו $\sum b_n$ טור חסום, $a_n \to 0$ מונוטונית. אזי $\sum a_n b_n$ מתכנס.

משפט

מספיק להוכיח כשהסדרה a_n יורדת ל-0. (אם $a_n \nearrow 0$ אז $-a_n \searrow 0$ ואז
$\sum(-a_n)b_n = -\sum \mathrm{a_n} b_n$)

הוכחה

נוכיח בעזרת קריטריון קושי: יהיו S_n הסכומים החלקיים של $\sum b_n$. יהיו $m < n$.

$$a_{m+1}b_{m+1_{=S_{m+1}-S_m}} + \cdots + a_n b_{n_{S_n - S_{n-1}}} =$$
$$= -a_{m+1}s_m + (a_{m+1} - a_{m+2})S_{m+1} + \cdots + (a_{n-1} - a_n)S_{n-1} + a_n S_n$$

$$\Downarrow$$

$$|a_{m+1}b_{m+1} + \cdots + a_n b_n| \leq a_{m+1}|Sm| + |a_{m+1} - a_{m+2}| \cdot |S_{m+1}| + \cdots$$
$$\cdots + |a_{n-1} - a_n||S_{n-1}| + a_n|S_n|$$
$$\leq (a_{m+1} + |a_{m+1} - a_{m+2}| + \cdots + |a_{n-1} - a_n| + a_m)c = 2a_{m+1}c$$

בהינתן אפסילון, $a_n \to 0$ יש N שאחריו $a_{m+1} < \frac{\epsilon}{2c}$ ← $2a_{m+1}c < \epsilon$.

עבור N זה מתקיים הקריטריון קושי לטור $\sum a_n b_n$.