תזכורת:

תהי G חבורה. תת-חבורה $H \leq G$ נקראת נורמלית אם $ghg^{-1} \in H$ לכל $h \in H$, $g \in G$

במילים אחרות $H \trianglelefteq G \iff H$ סגורה להצמדה $\iff H$ הינה איחוד של מחלקות הצמדה מ-G

דוגמא:

$H = \{e, (1\,2)(3\,4), (1\,3)(2\,4), (1\,4)(2\,3)\} \leq S_4$

הוכחנו בשיעור הקודם שזו תת-חבורה.

אבל $(1\,2)(3\,4), (1\,3)(2\,4), (1\,4)(2\,3)$ הן כל התמורות ב-S_4 עם מבנה מחזורי $2,2$. לכן זו מחלקת הצמדה. ברור e $\{e\}$ מחלקת הצמדה. לכן $H = \{e\} \cup \{(1\,2)(3\,4), (1\,3)(2\,4), (1\,4)(2\,3)\}$

הינו איחוד של מחלקות הצמדה, לכן $H \trianglelefteq S_4$

הוכחנו לפני שבועיים שאם $H \leq G$ תת-חבורה. אזי $H \trianglelefteq G$ אם ורק אם $gH = Hg$ לכל $g \in G$.

תוצאה:

תהי $H \leq G$ תת-חבורה מאינדקס 2. כלומר, $[G:H]=2$. אזי $H \trianglelefteq G$

תזכורת: $[G:H] = |G/H| = |H\backslash G|$

הוכחה:

$eH = H = He$ מחלקה אחת (מימין ומשמאל). אם יש רק שתי מחלקות אז המשלים $G \backslash H$ חייב להיות המחלקה השניה.

לכן, H ו-$G \backslash H$ שתיהן מחלקות מימין ומשמאל. ואלה כל המחלקות

$\begin{pmatrix} gH = Hg = H & \text{אם } g \in H \\ gH = Hg = G \backslash H & \text{אם } g \notin H \end{pmatrix}$ כלומר, $H \trianglelefteq G$

דוגמה:

$H=\{e,(1,2)(3,4),(1\,3)(2,4),(1\,4)(2\,3)\} \trianglelefteq S_4$

תהי $K=\langle(1\,2)(3\,4)\rangle=\{e,(1\,2)(3\,4)\}$

נשים לב ש $[H:K]=\frac{4}{2}=2$ לכן, על פי התוצאה הקודמת $K\trianglelefteq H$

נשים לב ש $H\trianglelefteq S_4$, $K\trianglelefteq H$, אך K לא נורמלית ב-S_4

$$(1\,3)((1\,2)(3\,4))(1\,3)^{-1}=(2\,3)(1\,4)=(1\,4)(2\,3)\notin K$$

הגדרה: תהי G חבורה, $H\leq G$ תת-חבורה. המנרמל של H הינו
$N_G(H)=\{g\in G \mid gH=Hg\}$

טענה:

1) המנרמל $N_G(H)$ הינו תת-חבורה של G

2) $H \trianglelefteq N_G(H)$

הערה: $g\in N_G(H)$ לא אומר ש $gh=hg$ לכל $h\in H$

הוכחה:

2) לכל $h\in H$, $hH=H=Hh$. לכן $h\in N_G(H)$. ולכן $H\subseteq N_G(H)$. לפי הגדרת המנרמל $gH=Hg$ לכל $g\in N_G(H)$. זה אומר כי $H\trianglelefteq N_G(H)$

1) $e\in N_G(H)$, לכן המנרמל לא ריק.

סגירות לכפל: יהיו $g_1,g_2\in N_G(H)$ אזי

$$g_1g_2H=g_1(g_2H)=g_1Hg_2=(g_1H)g_2=Hg_1g_2 \Rightarrow g_1g_2\in N_G(H)$$

סגירות להפכי: יהי $g\in N_G(H)$. לכן, $gH=Hg$. נכפל ב e

$$g^{-1}(gH)=g^{-1}(Hg) \Rightarrow H=g^{-1}Hg \Rightarrow Hg^{-1}=g^{-1}H$$

לכן $g^{-1}\in N_G(H)$

אבחנה:

נובע מההגדרה כי $N_G(H)$ היא תת החבורה הגדולה ביותר של G כך ש H נורמלית בה.

אבחנה:

תהי $H \le G$ תת-חבורה. אזי $H \trianglelefteq G \iff N_G(H)=G$

טענה:

תהי $H \trianglelefteq G$ תת-חבורה נורמלית. נגדיר פעולה בינארית על G/H (קבוצת המחלקות): $(g_1H)(g_2H)=g_1g_2H$. הכפל הזה מוגדר היטב והקבוצה G/H עם הכפל הזה היא חבורה.

הוכחה:

צריך להוכיח כי כפל המחלקות מוגדר היטב. אכן, יהיו $g_1H=x_1H$ ו- $g_2H=x_2H$ (בחירות שונות של נציגים). צריך להוכיח כי:

$g_1g_2H=x_1x_2H$

אכן, $g_1=x_1H \Leftarrow$ קיים $h_1\in H$ כך ש $x_1=g_1h_1$ ובאופן דומה, $x_2=g_2h_2$

אזי:

$$x_1x_2=g_1h_1g_2h_2=g_1g_2(g_2^{-1}h_1g_2)h_2=g_1g_2\underbrace{(g_2^{-1}h_1(g_2^{-1})^{-1})}_{\in H,\ H\ \text{נורמלית}}h_2=g_1g_2\underbrace{((g_2^{-1}h_1g_2)h_2)}_{\in H}$$

לכן, $x_1x_2H=g_1g_2H$

תרגיל:

אם H אינה נורמלית, הכפל הנ"ל לא מוגדר היטב

נראה ש G/H עם הפעולה שהגדרנו זו חבורה:

אסוציאטיביות:

$$(g_1H)((g_2H)(g_3H)) = g_1H(g_1g_2H) = (g_1(g_2g_3))H = ((g_1g_2)g_3)H = (g_1g_2H)(g_3H)$$
$$= ((g_1H)(g_2H))(g_3H)$$

איבר יחידה: $e_{G/H} = eH = H$. אכן לכל $gH \in G/H$

$$(eH)(gH) = gH = (gH)(eH)$$

איבר הופכי:

$$(gH)^{-1} = g^{-1}H$$

הגדרה: G/H נקראת חבורת המנה של H

קומגאות:

1) $G = \mathbb{Z}$, $H = n\mathbb{Z} = \langle n \rangle$. $\mathbb{Z}$ אבלית, לכן כל תת-חבורה של G היא נורמלית. בפרט $n\mathbb{Z} \trianglelefteq \mathbb{Z}$

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{$מחלקות השקילות מודולו $n\}$

$$g_1H = [g_1], \quad g_2H = [g_2]$$
$$(g_1H)(g_2H) = (g_1+g_2)H = [g_1+g_2]$$

זה בדיוק חיבור מחלקות השקילות. כלומר $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_n$

2) $G = GL_2(\mathbb{R})$ $\quad H = SL_2(\mathbb{R}) = \{A \in GL_2(\mathbb{R}) : \det(A) = 1\}$

נשים לב כי $H \trianglelefteq G$

אכן, תהי $A \in SL_2(\mathbb{R})$, $B \in GL_2(\mathbb{R})$. אזי:

$$\det(BAB^{-1}) = \det(B)\det(A)\det(B)^{-1} = \det(A) = 1$$

לכן $BAB^{-1} \in H$

ראינו לפני שבוע"ם כי $f: GL_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$ $\quad f(A) = \det(A)$

היא הומומורפיזם. ברור כי $H = SL_2(\mathbb{R}) = \ker(f)$

הוכחנו כי $\ker f \trianglelefteq G$ לכל הומ' $f: G \to K$

ראינו בשיעור השני שהמחלקות הן הקבוצות של כל המטריצות עם אותה הדטרמיננטה. $x \in \mathbb{R}^*$

$$\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} H = \{\text{קב' מטריצות עם דט' } x\}$$

$$\{\text{מטריצות עם דט' } x\}\{\text{מטריצות עם דט' } y\} = \left(\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} H\right)\left(\begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} H\right) = \begin{pmatrix} xy & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} H = \{\text{מטריצות עם דט' } xy\}$$

ההתאמה $x \mapsto \{\text{מטריצות עם דט' } x\}$ נותנת איזומורפיזם:

$$\mathbb{R}^* \cong GL_2(\mathbb{R}) / SL_2(\mathbb{R})$$

משפטי האיזומורפיזם של נתר:

משפט האיזומורפיזם הראשון:

יהי $f: G \to H$ הומומורפיזם. אזי $G/(\ker f) \cong f(G)$

הוכחה:

נגדיר העתקה $\varphi: G/(\ker f) \to f(G)$. $\quad \varphi(g(\ker f)) = f(g)$

הוכחנו לפני שבוע"ם, $h \in f(G)$, $f(g) = h$ אזי $f^{-1}(h) = g(\ker f)$

לכן φ מוגדרת היטב וחח"ע. φ על כיוון שאם $h \in f(G)$ קיים $g \in G$

כך ש $f(g) = h$ אזי, $\varphi(g(\ker f)) = f(g) = h$

קיבלנו φ חח"ע ועל.

נוכיח כי φ הומ'. אכן:

$$\varphi(g_1(\ker f), g_2(\ker f)) = \varphi(g_1 g_2(\ker f)) = f(g_1 g_2) = f(g_1) f(g_2) =$$
$$= \varphi(g_1(\ker f))\, \varphi(g_2(\ker f))$$

לכן φ הומ'.

תזכורת: חבורה G נקראת ציקלית אם קיים $g\in G$ כך ש $G=\langle g\rangle$

טענה:

תהי G ציקלית. אזי $G\simeq\mathbb{Z}$ או $G\simeq\mathbb{Z}_n$ עבור $n\in\mathbb{N}$

הוכחה:

G ציקלית לפי ההנחה, יהי $g\in G$ יוצר. נתבונן בהומומורפיזם

$f:\mathbb{Z}\to G \qquad f(n)=g^n$

כיוון ש G ציקלית, f על. וכן, לכל $x\in G$ קיים n כך ש $x=g^n=f(n)$. f על ולכן $G=f(\mathbb{Z})$.

לפי משפט האיזו' הראשון $G=f(\mathbb{Z})\simeq\mathbb{Z}/(\ker f)$

הגרעין $\ker f$ הינו תת חבורה של $\mathbb{Z}$

בשיעור הקודם מיינו את כל תתי החבורות של $\mathbb{Z}$:

$n\mathbb{Z}$ או $\{0\}=0\mathbb{Z}$

אם $\ker f=n\mathbb{Z}$ אזי $G\simeq\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}=\mathbb{Z}_n$

אם $\ker f=\{0\}$ אזי $G\simeq\mathbb{Z}/\{0\}=\mathbb{Z}$

תוצאה:

תהי G חבורה ציקלית. אם G אינסופית אזי $G\simeq\mathbb{Z}$

אם G סופית, $|G|=n$ אזי $G\simeq\mathbb{Z}_n$

דוגמאות:

1) $f:GL_n(\mathbb{R})\to\mathbb{R}^* \qquad f(A)=\det(A)$

המשפט אומר $GL_n(\mathbb{R})/\ker f\simeq f(GL_n(\mathbb{R}))$

$\ker f=SL_n(\mathbb{R}) \qquad f(GL_n(\mathbb{R}))=\mathbb{R}^*$

$\det\begin{pmatrix}x & & 0\\ & 1 & \\ 0 & & \ddots\ 1\end{pmatrix}=x$

לכן $GL_n(\mathbb{R})/SL_n(\mathbb{R})\simeq\mathbb{R}^*$

2) $f:G\to G$ הומו' הזהות. $f(g)=g$. $f(G)=G\,,\ \ker f=\{e\}$

מהמשפט $G/_{\{e\}} \simeq G$

3) $f:G\to G$ הומו' טריוויאלי, $f(g)=e$ לכל $g\in G$. $f(G)=\{e\}\,,\ \ker f=G$

מהמשפט $G/_G \simeq \{e\}$

4) תהי G חבורה $H\trianglelefteq G$. ההעתקה הטבעית הינו הומו' $f:G\to G/_H$ כך ש $f(g)=gH$. זה הומו' לפי ההגדרה של כפל מחלקות.

$$f(g_1g_2)=g_1g_2H=(g_1H)(g_2H)=f(g_1)f(g_2)$$

ברור כי f על

$$\left(g\in\ker f \iff gH=e_{G/H} \iff gH=eH=H \iff g\in H\right)\iff \ker f=H$$

מהמשפט: $G/_{\ker f}\simeq f(G)$

$G/_H \simeq G/_H$

דוגמא: $H=n\mathbb{Z}\,,\ G=\mathbb{Z}$ $\quad f:\mathbb{Z}\to \mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}=\mathbb{Z}_n$
$a\mapsto [a]$

5) $f:\mathbb{R}\to GL_2(\mathbb{R})$

$$f(x)=\begin{pmatrix}\cos x & -\sin x\\ \sin x & \cos x\end{pmatrix}$$

$$\ker f=\{x\in\mathbb{R}:\cos x=1,\sin x=0\}=2\pi\mathbb{Z}=\{2\pi n:n\in\mathbb{Z}\}=\langle 2\pi\rangle$$

$$f(\mathbb{R})=\left\{\begin{pmatrix}\cos x & -\sin x\\ \sin x & \cos x\end{pmatrix}\right\}=SO_2(\mathbb{R})$$

מהמשפט נקבל $SO_2(\mathbb{R})\simeq \mathbb{R}/_{2\pi\mathbb{Z}}$

הכללה:

יהי $f:G\to H$ הומו׳. תהי $N \trianglelefteq G$ תת חבורה נורמלית כך ש- $N\leq \ker f$. אזי f משרה הומו׳ $\varphi: G/N \to H$ $\varphi(gN)=f(g)$

אם $N \nleq \ker f$, φ לא מוגדר היטב.

תזכורת:

$A_n=\{\sigma\in S_n \mid sgn(\sigma)=1\}$

הוכחנו בפעם הקודמת $sgn: S_n\to\{\pm1\}\simeq\mathbb{Z}_2$, $A_n=\ker(sgn)$

אם $n\geq 2$ אזי sgn על ($sgn(e)=1$ כי $sgn((12))=-1$)

לפי משפט האיזו׳:

$S_n/A_n \simeq \mathbb{Z}_2$

בפרט $\left|S_n/A_n\right|=\frac{|S_n|}{|A_n|}=2$ לכן $|A_n|=\frac{n!}{2}$

טענה:

תהי G חבורה. תהי $H\trianglelefteq G$ תת חבורה נורמלית עם אינדקס סופי n. אזי לכל $g\in G$ מתקיים $g^n\in H$

הוכחה:

G/H היא חבורה מסדר n. נתבונן באיבר $gH\in G/H$. אזי

$$g^nH=(gH)^n=(gH)^{|G/H|}=e_{G/H}=eH=H$$

לכן $g^nH=H \Leftarrow g^n\in H$

תוצאה:

נשים לב כי $|A_4|=12$ ולכן ב- A_4 אין תת חבורה מסדר 6

כלומר, ההיפך של לגרנז׳ לא נכון $6|12$ אבל ב- A_4 אין תת חבורה מסדר 6

הוכחה:

נניח בשלילה כי קיימת $H \leq A_4$ כך ש $|H|=6$

אז' $[A_4:H] = \frac{12}{6} = 2$ ולכן $H \trianglelefteq A_4$ (לפי טענה מתחילת השיעור)

בפרט $\sigma^2 \in H$ לכל $\sigma \in A_4$. יהי $\sigma \in A_4$ תמורה מסדר $o(\sigma)=3$

אז' $\sigma^3 = e$, לכן $\sigma = \sigma^4 = (\sigma^2)^2 \in H$

כל מחזור מאורך 3 הינו תמורה זוגית (ומחזור מאורך אי זוגי

הינו תמורה זוגית ולהיפך) מסדר 3. ב-A_4 יש 8 מחזורים מאורך 3

מהטענה הקודמת

(123) (132) (124) (142)

(134) (143) (234) (243)

מצאנו 8 איברים של חבורה מסדר 6. בסתירה.

הגדרה: תהי G חבורה. ותהיינה $H,N \leq G$ תת-קבוצות

$HN = \{hn : h \in H, n \in N\}$

HN לא בהכרח תת-חבורה של G (אפילו אם H,N תתי חבורות)

טענה:

אם $H \leq N_G(N)$ אז' $HN \leq G$ תת-חבורה

הוכחה:

יהי $h \in H$. לפי הנחה, $h \in N_G(N)$. כלומר, $hN = Nh$. בפרט לכל $n \in N$

$hn \in hN = Nh$, לכן קיים $n' \in N$ כך ש $hn = n'h \Leftarrow hnh^{-1} = n'$

נוכיח כי HN תת חבורה:

סגירות לכפל: יהיו $h_1n_1, h_2n_2 \in HN$

$$h_1n_1h_2n_2 = \underbrace{h_1h_2}_{\in H}\underbrace{(h_2^{-1}n_1h_2)n_2}_{\in N} \in HN$$

כי $h_2^{-1}n_1h_2 \in N$

$(h_2^{-1} \in N_G(N))$

לכן HN סגור לכפל

סגירות להפכית: יהי $hn\in HN$

$$(hn)^{-1}=n^{-1}h^{-1}=\underbrace{h^{-1}}_{\in H}\underbrace{(hnh^{-1})}_{\in N}\in HN$$