אלגברה מופשטת 1, תרגיל בית 8

מתרגלים: סולי וישקאוצן ואדם צ'פמן. להגשה ב1.1 או ב4.1 בהתאם לשיעור התרגיל.

1) מצאו תנאי מספיק והכרחי על מספרים שלמים n וm לקיום מונומורפיזם $f:\mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_m$. רשמו את המונומורפיזם במפורש אם קיים כזה.

פיתרון: אם קיים מונומורפיזם כזה אזי $o(f(1))=o(1)=n$ ואז $n\,|\,m$. מאידך, אם אכן $n\,|\,m$ אזי קיים מונומורפיזם כזה, זה המקיים $f(x)=\frac{m}{n}x$ לכל $x\in\mathbb{Z}_n$. לכן התנאי ההכרחי ומספיק הוא $n\,|\,m$.

2) מצאו אפימורפיזם שאינו איזומורפיזם מהחבורה $\mathbb{C}^*$ לעצמה.

פיתרון: הפונקציה $f:\mathbb{C}^*\to\mathbb{C}^*$ המקיימת $f(x)=x^2$ היא אפימורפיזם. ברור שאינה איזומורפיזם משום ש $f(-1)=1=f(1)$.

3) הוכיחו או הפריכו: לכל חבורה G ותת-חבורה נורמלית H, אם $G\cong G/H$ אזי H היא התת-חבורה הטריוויאלית.

פיתרון: ניקח $G=\mathbb{C}^*$ ו $f:\mathbb{C}^*\to\mathbb{C}^*$ המקיימת $f(x)=x^2$. אזי עבור $H=\ker(f)=\{1,-1\}$ מתקיים $G\cong G/H$ בעוד ש H איננה טריוויאלית.

[הפרכה]

4) הראו ש $\mathbb{R}/\mathbb{Z}\cong S^1$ כאשר $S^1\leq\mathbb{C}^*$ היא חבורת מעגל היחידה של המרוכבים.

פיתרון: הפונקצייה $f:\mathbb{R}\to S^1$ המקיימת $f(x)=cis(2\pi x)$ היא אפימורפיזם. הגרעין שלה הוא $\mathbb{Z}$ ולכן מתקיים $\mathbb{R}/\mathbb{Z}\cong S^1$.

5) הראו ש $\Omega_\infty \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ כאשר $\Omega_\infty \le \mathbb{C}^*$ היא חבורת שרשי היחידה.

פיתרון: הפונקציה $f:\mathbb{Q}\to\Omega_\infty$ המקיימת $f(x)=cis(2\pi x)$ היא אפימורפיזם. הגרעין שלה הוא $\mathbb{Z}$ ולכן מתקיים $\Omega_\infty \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.