אינפי 3

תרגול 3

גבולות חוזרים

הגדרה

תהי $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$. הגבולות הבאים נקראים גבולות חוזרים:

$\lim\limits_{y\to y_0}(\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y))$ גבול חוזר לפי x ואח"כ לפי y.

$\lim\limits_{x\to x_0}(\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y))$ גבול חוזר לפי y ואח"כ לפי x.

תרגילים-חישוב גבולות חוזרים:

1. $f(x,y)=\dfrac{x^2}{x^2+y^2}$ כאשר $(x,y)\leftarrow(0,0)$

פתרון:

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x^2}{x^2+y^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2}=1$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2+y^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{0}{y^2}=0$$

לגבי הגבול הכפול $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2}{x^2+y^2}$ נבחר מסלול $\begin{matrix} y=kx \\ x\to 0\end{matrix}$. נקבל

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=k0}}\frac{x^2}{k^2x^2+x^2}=\frac{1}{1+k^2}$$

שברור שתלוי בk

2. $f(x,y)=\left(x^2+y^2\right)\sin\frac{1}{x}$ בנקודה $(x,y)\to(0,0)$.

פתרון: עבור הגבולות החוזרים

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\left(x^2+y^2\right)\sin\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}x^2\sin\frac{1}{x}=0$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\left(x^2+y^2\right)\sin\frac{1}{x}\right)=not\,exist$$

הגבול הכפול:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(x^2+y^2\right)\sin\frac{1}{x}$$

קל לראות במקרה זה שמודבר על פונקציה אפס כפולה חסומה. אם לא ראינו נציב $t=x^2+y^2$. נקבל $\lim_{t\to 0}t\sin(???)=0$

3. מצא את גבול הפונקציה בנקודה $(0,0)$ והגבולות החוזרים, כאשר $f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x^2}=0$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}\right)=\lim_{y\to 0}\frac{0}{y^2}=0$$

ז"א הגבולות החוזרים שווים. נבדוק האם הגבול הכפול קיים:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$$

ננס להראות שהגבול הכפול אינו קיים ע"י בחירת שני מסלולים:

$$\lim_{\substack{y=0\\ x\to 0}}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=0$$

נבחר את המסלול $y=x$(מתבקשת בחירה זו כי אז יתאפס הגורם $(x-y)^2$ ודרגת המונה תהיה שווה לדרגת המכנה)

$$\lim_{\substack{y=0\\ x\to 0}}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^4}=1$$

הקשר בין גבולות חוזרים וגבול כפול:

- אם קיימים גבולות חוזרים והם שונים אז אין גבול לפונקציה.
- אם אחד הגבולות לא קיים, לא ניתן להסיק לגבי הגבול הכפול.
- אם יש לפונקציה גבולות חוזרים והם שווים, לא ניתן להסיק לגבי הגבול הכפול.

4. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} |x|^y$ וחשב את הגבולות החוזרים.

פתרון

נראה כי הסתכלות על הגבולות החוזרים במקרה זה יכולים להוביל לכך שהגבול אינו קיים:

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}|x|^y\right)=1$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}|x|^y\right)=0$$

ולכן במקרה זה הגבול הכפול לא קיים.

מסילה

- מסילה: פונקציה רציפה מקטע ממשי כלשהו למרחב
- מסילה סגורה: מסילה שנקודות הקצה שלה שוות זו לזו.
- מסילה פשוטה: מסילה שאינה חותכת את עצמה, פרט אולי לנק' הקצה.

דוגמאות למסילות:

- X: [0,1] $\to \mathbb{R}^2$

  F(x)=(x,2x+3)

- עבור $\gamma : [0, 2\pi] \to X$, המוגדרת לפי ההתאמה: $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$

  המסילה היא סיבוב סביב מעגל היחידה.

- עבור הנק' A (2,1), B(4,2)

  והקטע t:[0,1] , נקבע מסילה מ-A ל-B: $\gamma(t)$=(2t+2,1+t)=(2,1)(1-t)+t(4,2)

ערך הביניים

הגדרה 3.10 יהי X מרחב מטרי. נאמר ש$-X$ מקיים את **תכונת ערך הביניים** אם לכל פונקציה רציפה $f : X \to \mathbb{R}$, לכל $a, b \in X$ ולכל t בין $f(a)$ לבין $f(b)$ קיים $c \in X$ עבורו: $f(c) = t$.

משפט יהי X מרחב מטרי ותהי $E \subseteq X$ קשירה. אזי E מקיימת את תכונת ערך הביניים.

תרגיל

5. תהיינה $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to D$ מסילות רציפות עבורן:

$$\gamma_1(0) = \gamma_2(1) = a, \gamma_2(0) = \gamma_1(1) = b$$

אזי, קיים $t \in [0,1]$ עבורו $f(\gamma_1(t)) = f(\gamma_2(t))$.

<u>פתרון:</u>

כאן הקטע סגור. נוכיח את הטענה.

ראשית, אם $f(a) = f(b)$ הטענה נכונה, מכיוון ש:

$$f(\gamma_1(0)) = f(a) = f(b) = f(\gamma_2(0))$$

אם כן, נניח ש- $f(b) \neq f(a)$, ובה"כ $f(b) > f(a)$.

נגדיר פונקציה $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ על ידי:

$$g(t) = f(\gamma_1(t)) - f(\gamma_2(t))$$

מצד אחד, $g(0) = f(a) - f(b) < 0$ ומצד שני $g(1) = f(b) - f(a) > 0$. g רציפה כהרכבת רציפות, ולכן לפי משפט ערך הביניים קיים $t \in [0,1]$ עבורו: $g(t) = 0$, כלומר:

$$f(\gamma_1(t)) = f(\gamma_2(t))$$

הגדרה:

בהינתן $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, נגדיר את הנגזרת החלקית לפי המשתנה x_i בנקודה a כך:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)=\lim_{\Delta x_i\to 0}\frac{f(a_1,a_2...,a_i+\Delta x_i,a_{i+1},...,a_n)-f(a_1,...,a_n)}{\Delta x_i}$$

הגרדיאנט הוא וקטור הנגזרות:

$$\nabla f=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a),...,\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)$$

הגרדיאנט הוא וקטור הנגזרות:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)$$

נסמן: $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = f_{x_i}(a)$.

באופן כללי, כאשר נגזור j_i פעמים לפי המשתנה ה־i, נסמן:

$$\frac{\partial^{j_1+...+j_n} f}{\partial^{j_1} x_1 .... \partial^{j_n} x_n}$$

*בעצם, כשאנו גוזרים לפי משתנה מסויים אנו מתייחסים אליו כאל המשתנה היחידי,

כאשר כל השאר הם קבועים.

תרגיל:

6. חשבו את הנגזרות החלקיות של הפונקציה:

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{(x^2+y)^2}{x^4+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 1 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

פתרון:

בכל נקודה שאינה $(0,0)$ נגזור כרגיל, כלומר נתייחס אל המשתנה האחר כאל קבוע.

זו נגזרת של מנה, ונקבל:

$$f_x(x,y)=\frac{4xy(y^2-x^4)}{(x^4+y^2)^2}$$

$$f_y(x,y) = \frac{2x^6 - 2x^2y^2}{(x^4+y^2)^2}$$

בנקודה $(0,0)$ נחשב לפי ההגדרה:

$$f_x(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f((t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{t^4}{t^4} - 1}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{1-1}{t} = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f((0,t)) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{t^2}{t^2} - 1}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{1-1}{t} = 0$$

7. חשבו את הנגזרות החלקיות f_x, f_y כאשר: $f(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

זו נגזרת של מנה, ולכן בכל נקודה שאינה $(0,0)$ נקבל:

$$f_x(x,y)=\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$f_y(x,y)=\frac{-xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

בנקודה $(0,0)$ הפונקציה אינה מוגדרת (בדקו שהפונקציה אינה רציפה שם).

8. f_{xy} (כלומר לגזור לפי x ואז לפי y) כאשר $f(x,y) = arccos\left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right)$.

תזכורת: $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$

נגזור לפי x ונקבל:

$$f_x(x,y) = \ldots = -\frac{1}{2\sqrt{xy - x^2}}$$

נגזור זאת לפי y ונקבל:

$$f_{xy}(x,y) = \ldots = \frac{x}{4(xy - x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

הגדרה:

תהי $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ פונקציה. נאמר שהפונקציה דיפרנציאבילית בנקודה $x^0=(x_1^0,...,x_n^0)$

אם אפשר לכתוב:

$$f(x_1^0+\Delta x_1,...,x_n^0+\Delta x_n)=f(x^0)+\sum_{i=1}^{n}(A_i+\alpha_i(x))\Delta x_i$$

כאשר $A_1,...,A_n$ קבועים ו־$\alpha_1,...,\alpha_n$ הן פונקציות ששואפות ל־0 כאשר Δx שואף ל־0.

כלומר, בסביבת x^0 אפשר להציג את הפונקציה בקירוב טוב כפונקציה ליניארית.

אם פונקציה דיפרנציאבילית בנקודה אז היא רציפה שם, והקבועים A_i הם הנגזרות החלקיות בנקודה:

$$A_k = \frac{\partial f}{\partial x_k}(x^0)$$

תנאי מספיק לדיפרנציאביליות: הנגזרות החלקיות קיימות ורציפות. תנאי זה לא הכרחי

איך בודקים האם פונקציה היא דיפרנציאבילית בנקודה מסוימת אם לאו?

נבדוק את הדיפרנציאביליות של הפונקציות הבאות בנקודה $(0,0)$.

1. $f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$.

הפונקציה רציפה כהרכבת רציפות.

$f(x,y)$ תהיה דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$ מתקיים:

$$f(0+h_1,0+h_2)-f(0,0)=f_x(0,0)h_1+f_y(0,0)+o\left(\sqrt{h_1^2+h_2^2}\right)$$

החלפנו את Δx_i שבהגדרה ב־h_i. כמו שאמרנו, אם היא אכן דיפ' אז הקבועים הם הנגזרות החלקיות בנקודה. ה־o מסמל את הקירוב.

נחשב את הנגזרות החלקיות בנקודה:

$$f_x(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[3]{t^3}}{t} = 1$$

$$f_y(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = 1$$

ולכן יש לבדוק אם מתקיים:

$$\sqrt[3]{h_1^3+h_2^3} = h_1 + h_2 + o\left(\sqrt{h_1^2+h_2^2}\right)$$

כלומר, האם:

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{\sqrt[3]{h_1^3+h_2^2}-h_1-h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0$$

כמשמעו של o. אך אם ניקח את המסלול $h_1 = h_2 = \frac{1}{n}$, נקבל:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{\frac{2}{n^3}} - \frac{2}{n}}{\sqrt{\frac{2}{n^2}}} = \frac{\sqrt[3]{2} - 2}{\sqrt{2}} \neq 0$$

ולכן הפונקציה אינה דיפרנציאבילית.