בס"ד

נקראות "העתקה לינארית" או "טרנספורמציה לינארית" אם לכל $v_1,v_2\in V$ ולכל $k_1,k_2\in K$ מתקיים: $F(k_1v_1+k_2v_2)=k_1F(v_1)+k_2F(v_2)$.

(פונקציונל לינארי הוא העתקה לינארית מ-V ל-K).

ההעתקה הצמודה T^*

הגדרה: (תזכורת) יהי V מרחב וקטורי מעל שדה K. העתקה לינארית $F: V\to V$ (כלומר, מ-V לעצמו) נקראת "אופרטור לינארי" או "טרנספורמציה לינארית על V".

המרחב של כל האופרטורים הלינאריים מסומן ב-$Hom(V,V)$ והוא מרחב וקטורי מעל K.

תזכורת: אמרנו בשיעורים קודמים שהמכפלה הפנימית על $\mathbb{R}^n$ נתונה ע"י ההגדרה: $<u,v> = u^t\cdot v$

והמכפלה הפנימית על $\mathbb{C}^n$ נתונה ע"י ההגדרה: $<u,v>=u^t\cdot\bar{v}$ כאשר u ו-v הם וקטורי עמודה.

הגדרה: אומרים שלאופרטור לינארי T על מרחב מכפלה פנימית V יש אופרטור צמוד T^* על V אם $<T(u),v>=<u,T^*(v)>$ לכל $u,v\in V$.

דוגמאות:

א. תהי A מטריצה ריבועית (ממשית) מסדר $n\times n$ ונסתכל עליה כאופרטור לינארי על $\mathbb{R}^n$. אזי עבור כל $u,v\in\mathbb{R}^n$:

$$<Au,v> = (Au)^t\cdot v = u^t\cdot A^t\cdot v = <u,A^tv>$$

(לפי התזכורת הנ"ל) (לפי הגדרת שיחלוף) (שוב לפי התזכורת הנ"ל)

לכן המטריצה המשוחלפת A^t היא הצמודה של A ($A^*=A^t$).

ב. תהי B מטריצה ריבועית מרוכבת מסדר $n\times n$ עליה נסתכל כאופרטור לינארי על $\mathbb{C}^n$. אזי עבור כל $u,v\in\mathbb{C}^n$:

$$<Bu,v>=(Bu)^t\cdot\bar{v} = u^t\cdot B^t\cdot\bar{v} = u^t\cdot\overline{\overline{B}}^t\cdot\bar{v} = u^t\cdot\overline{(\bar{B})^t\cdot v} = <u,\bar{B}^t\cdot v>$$

($\overline{\overline{B}}=B$)

לכן המטריצה הצמודה המשוחלפת $\bar{B}^t$ היא הצמודה של B ($B^*=\bar{B}^t$).

בס"ד

משפט: יהי T אופרטור ליניארי על מרחב מכפלה פנימית V, ממימד סופי מעל K. אזי:

א. קיים אופרטור ליניארי יחיד T^* על V כך ש- $\langle T(u),v\rangle = \langle u,T^*(v)\rangle$ לכל $u,v\in V$. (נאמר ל-T יש צמוד T^* והוא יחיד).

ב. אם A היא ההצגה המטריצית של T ביחס לבסיס אורתונורמלי $S=\{u_i\}$ שלו של V, אז ההצגה המטריצית של T^* בבסיס S היא הצמודה A^* של A.

נדגיש שלא קיים קשר פשוט כזה בין המטריצות המייצגות את T ו-T^* אם הבסיס אינו אורתונורמלי.

דוגמא: מצאו את הצמוד של האופרטור הליניארי $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ המוגדר ע"י: $T(x,y,z)=(3x+4y-5z,\ 2x-6y+7z,\ 5x-9y+z)$.

פתרון -

ראשית נמצא מטריצה A המייצגת את T בבסיס הרגיל של $\mathbb{R}^3$ (שימו לב ששורות A הן מקדמי x,y,z).

$$A=\begin{bmatrix}3&4&-5\\2&-6&7\\5&-9&1\end{bmatrix}$$

כיוון שהבסיס הרגיל (הסטנדרטי) הוא אורתונורמלי, נוכל להשתמש במשפט הנ"ל/סעיף ב' ונקבל שהמטריצה של T^* בבסיס זה היא הצמודה של A (A^*).

$$A^*=A^T=\begin{bmatrix}3&2&5\\4&-6&-9\\-5&7&1\end{bmatrix}$$

ואז נקבל ש-T^* הוא:

$$T^*(x,y,z)=(3x+2y+5z,\ 4x-6y-9z,\ -5x+7y+z)$$

מש"ל

סוגים מיוחדים של אופרטורים - $\boxed{\text{צמוד לעצמו}}$

הגדרה: ~~[illegible]~~

יהי T אופרטור ליניארי על מרחב מכפלה פנימית V. אנו נאמר ש-T צמוד לעצמו אם $T^*=T$.

בס"ד

נעבור מטריצות:

הגדרה: מטריצה ריבועית A מסדר $n\times n$ מעל F $(F=\mathbb{R}$ או $F=\mathbb{C})$ נקראת מטריצה צמודה לעצמה אם $A^*=A$.

כאשר $F=\mathbb{R}$ נקראת מטריצה כזו גם בשם מטריצה סימטרית (ואז מתקיים: $A=A^*=A^T$).

כאשר $F=\mathbb{C}$ נקראת מטריצה כזו גם בשם מטריצה הרמיטית (ואז מתקיים: $A=A^*=\overline{A}^T$).

משפט 1: יהי λ ערך-עצמי של אופרטור ליניארי T על V. אם T צמוד לעצמו (כלומר $T^*=T$), אזי λ ממשי.

משפט 2: יהי T אופרטור צמוד עצמית על V. נניח ש-u ו-v הם וקטורים עצמיים של T השייכים לערכים עצמיים שונים. אזי - u ו-v אורתוגונליים, כלומר $\langle u,v\rangle=0$.

נוכיח את משפט-2:

נתון ש-u ו-v הם ו"ע השייכים לע"ע שונים לכן נניח ש- $T(u)=\lambda_1 u$ ו- $T(v)=\lambda_2 v$ כאשר $\lambda_1\neq\lambda_2$. אזי:

$$\lambda_1\langle u,v\rangle=\langle\lambda_1 u,v\rangle=\langle T(u),v\rangle=\langle u,T^*(v)\rangle=$$

$$\xrightarrow{(T^*=T)}=\langle u,T(v)\rangle=\langle u,\lambda_2 v\rangle=\overline{\lambda_2}\langle u,v\rangle=$$

כיוון שהע"ע הם ממשיים לפי משפט-1 $\longrightarrow=\lambda_2\langle u,v\rangle$

$\Downarrow$

קיבלנו ש:

$$\lambda_1\langle u,v\rangle=\lambda_2\langle u,v\rangle$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda_1\langle u,v\rangle-\lambda_2\langle u,v\rangle=0$$

$$\Downarrow$$

$$\langle u,v\rangle\cdot(\lambda_1-\lambda_2)=0$$

$$\downarrow$$

$$\lambda_1-\lambda_2\neq0$$

כי נתון ש: $\lambda_1\neq\lambda_2$

$\downarrow$

לכן $\langle u,v\rangle=0$

מש"ל.

② אורתוגונלי/אוניטרי

הגדרה: יהי T אופרטור ליניארי על מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי V. אם $T^*=T^{-1}$ או באופן שקול - $TT^*=T^*T=I$ אז T נקרא אורתוגונלי אם השדה הוא ממשי או אוניטרי אם השדה הוא מרוכב.

ב"ה

ועבור מטריצות:

הגדרה 1: מטריצה מרוכבת A המקיימת $AA^*=A^*A=I$ נקראת- מטריצה אוניטרית. $\left(A\cdot\bar{A}^T=\bar{A}^T\cdot A=I\ :\text{כלו}\right)$ או באופן שקול- $A^*=A^{-1}$

הגדרה 2: מטריצה ממשית A המקיימת $AA^*=A^*A=I$ נקראת- מטריצה אורתוגונלית. $\left(AA^T=A^TA=I\ :\text{כלו}\right)$ או באופן שקול- $A^*=A^{-1}$ $(A^*=A^T)$

משפט: התנאים הבאים על אופרטור T שקולים:

א. $T^*=T^{-1}$, כלומר, $TT^*=T^*T=I$.

ב. T שומר מכפלות פנימיות, כלומר לכל $v,w\in V$:
$$<T(v),T(w)>=<v,w>$$

ג. T שומר אורכים, כלומר לכל $v\in V$: $\|T(v)\|=\|v\|$.

③. נורמלי.

הגדרה: אופרטור T נקרא נורמלי אם הוא מתחלף עם הצמוד שלו, כלומר אם $TT^*=T^*T$. באופן אנלוגי, מטריצה ריבועית A נקראת נורמלית אם: $AA^*=A^*A$.

דוגמאות-

א. האופרטורים הצמודים-לעצמם, האורתוגונליים והאוניטריים מהווים מקרים פרטיים של אופרטורים נורמליים. ההיפך לא נכון. לדוגמא:

ב. המטריצה הממשית-
$$A=\begin{pmatrix}3 & -1 & -\sqrt{2}\\ -1 & 3 & -\sqrt{2}\\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 2\end{pmatrix}$$
אינה אורתוגונלית ואינה סימטרית אולם A היא מטריצה נורמלית:
$$AA^T=A^TA=\begin{pmatrix}12 & -4 & 0\\ -4 & 12 & 0\\ 0 & 0 & 8\end{pmatrix}$$

ג. המטריצה המרוכבת- $A=\begin{pmatrix}2 & 2i\\ 2 & 4+2i\end{pmatrix}$ אינה אוניטרית ואינה הרמיטית, אך היא נורמלית, כי- $A^*=\begin{pmatrix}2 & 2\\ -2i & 4-2i\end{pmatrix}$ ומתקיים ש:
$$AA^*=A^*A=\begin{pmatrix}8 & 8+8i\\ 8-8i & 24\end{pmatrix}$$

בס״ד

אלגברה לינארית - שיעור 12

הנושא: לכסון-אורתוגונלי ולכסון-אוניטרי

לכסון אורתוגונלי

(תזכורת) **הגדרה 1:** מטריצה ריבועית A מסדר $n\times n$ מעל $\mathbb{F}$ ($\mathbb{F}=\mathbb{R}$ או $\mathbb{F}=\mathbb{C}$) נקראת מטריצה צמודה לעצמה אם $A^*=A$.

כאשר $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ נקראת מטריצה זו גם בשם מטריצה סימטרית (ואז מתקיים: $A=A^*=A^T$).

כאשר $\mathbb{F}=\mathbb{C}$ נקראת מטריצה זו גם בשם מטריצה הרמיטית (ואז מתקיים: $A=A^*=\bar{A}^T$).

הגדרה 2: יהי T אופרטור לינארי על מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי V. אם $T^*=T^{-1}$ או באופן שקול $TT^*=T^*T=I$ אז T נקרא אורתוגונלי אם השדה הוא ממשי או אוניטרי אם השדה הוא מרוכב.

ועבור מטריצות:

א. מטריצה מרוכבת A המקיימת $A^*=A^{-1}$ או באופן שקול $AA^*=A^*A=I$ נקראת "מטריצה אוניטרית".

ב. מטריצה ממשית A המקיימת $A^T=A^{-1}$ ($A^*=A^T$) או באופן שקול - $AA^T=A^TA=I$ נקראת - "מטריצה אורתוגונלית".

(תזכורת: מטריצות A ו-B דומות אם קיימת מטריצה הפיכה P כך ש- $B=P^{-1}AP$.)

הגדרה 3: תהיינה A ו-B מטריצות ריבועיות ממשיות מאותו סדר. אומרים כי A דומה אורתוגונלית ל-B, אם קיימת מטריצה אורתוגונלית P כך ש- $B=P^{-1}AP$.
($P^T=P^{-1}$)

הערות:

א. אם A דומה אורתוגונלית ל-B אז B דומה אורתוגונלית ל-A.

ב. מטריצות הדומות אורתוגונלית דומות גם במובן הרגיל. ההיפך אינו נכון בדר״כ.

למשל - המטריצות $A=\begin{bmatrix}1&2\\2&4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1&1\\4&4\end{bmatrix}$ דומות זו לזו, אבל אינן דומות אורתוגונלית.
(הסבר בדף הבא)

(למטריצות דומות ע"ע אותם)

דוג'

הסבר: הע"ע של A ו-B הם 0 ו-5 ולכן A ו-B דומות למטריצה האלכסונית $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$. כיוון ש-A ו-B דומות לאותה מטריצה, מקבלים שהן דומות. (לפי מיון מטריצות)

אבל הן לא דומות אורתוגונלית. כיוון ש-A היא מטריצה סימטרית, ואילו היתה A דומה אורתוגונלית ל-B היינו מקבלים לפי משפט ש-B היא גם מטריצה סימטרית. אולם B אינה סימטרית, ולכן A אינה דומה אורתוגונלית ל-B.

משפט: כל מטריצה סימטרית ממשית דומה אורתוגונלית למטריצה אלכסונית.
במילים אחרות:
לכל מטריצה סימטרית ממשית קיימת מטריצה אורתוגונלית המלכסנת אותה.
כיצד נמצא מטריצה כזו? השיטה מסתמכת על תכונה מעניינת של וקטורים עצמיים של מטריצות סימטריות ממשיות. כזכור, וקטורים עצמיים השייכים לע"ע שונים של מטריצה כלשהי הם בלתי-תלויים-לינארית. עבור מטריצות סימטריות ממשיות נכונה טענה חזקה יותר:

משפט: ו"ע השייכים לע"ע שונים של מטריצה סימטרית ממשית הם אורתוגונליים זה לזה.

מסקנה: תהי A מטריצה סימטרית מסדר $n \times n$, ונניח של-A יש n ע"ע שונים: $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. נסמן ב-$\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_n$ את הו"ע המתאימים. אזי $(\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_n)$ הוא בסיס אורתוגונלי של $\mathbb{R}^n$ ואילו המטריצה P שעמודותיה הן הוקטורים המנורמלים: $\frac{\underline{u}_1}{\|\underline{u}_1\|}, \dots, \frac{\underline{u}_n}{\|\underline{u}_n\|}$ תהיה המטריצה האורתוגונלית המלכסנת את A.

נשים לב שבמידה וישנם כמה וקטורים עצמיים השייכים לאותו ע"ע, יש להפעיל עליהם את תהליך גרם-שמידט על מנת שהוקטורים יהיו אורתוגונליים זה לזה.

דוגמא: מצא מטריצה אורתוגונלית המלכסנת את המטריצה $A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$.

פתרון: ניתן לראות ש-A היא מטריצה סימטרית כיוון ש-$A = A^* = A^T$.
נמצא את הע"ע של A.

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-6 & 2 & -2 \\ 2 & \lambda-5 & 0 \\ -2 & 0 & \lambda-7 \end{vmatrix} = (\lambda-6)(\lambda^2-12\lambda+35) - 2(2\lambda-14) - 2(2\lambda-10) =$$
$$= \lambda^3 - 18\lambda^2 + 99\lambda - 162 = (\lambda-3)(\lambda^2-15\lambda+54) =$$
$$= (\lambda-3)(\lambda-6)(\lambda-9)$$

בס"ד

קיבלנו שהע"ע הם: $9,6,3$. הו"ע המתאימים הם: (לאחר חישוב)

$u_1 = (2,2,-1)$

$u_2 = (-1,2,2)$

$u_3 = (2,-1,2)$

וקטורים אלה אורתוגונליים זה לזה, כיון שהם שייכים לע"ע שונים.
קיבלנו בסיס אורתוגונלי. ננרמל את הוקטורים ונציב אותם כעמודות של P.

נחשב את הנורמות: $\|u_1\| = \|u_2\| = \|u_3\| = \sqrt{2^2+2^2+(-1)^2} = \sqrt{9} = 3$

ולכן:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

(P היא מטריצה אורתוגונלית ו- $P^{-1}AP$ היא מטריצה אלכסונית הדומה ל-A). משל.

לכסון אוניטרי

הגדרה: תהי A מטריצה ריבועית מסדר n מעל F. נאמר כי A לכסינה אוניטרית אם"ם A דומה אוניטרית למטריצה אלכסונית, כלומר, אם"ם קיימת מטריצה אוניטרית Q ($Q^*=Q^{-1}$) שעבורה: $Q^{-1}AQ$ היא מטריצה אלכסונית.

הערה: כל מטריצה לכסינה אוניטרית או אורתוגונלית היא כמובן לכסינה במובן הרגיל.

הגדרה (תזכורת): מטריצה ריבועית A מעל F נקראת מטריצה נורמלית אם"ם $AA^* = A^*A$.

הערה: מטריצות צמודות לעצמן, אוניטריות, אורתוגונליות וסימטריות הן נורמליות. ההיפך לא נכון. (כפי שראינו בשיעור הקודם)

משפט: מטריצה ריבועית (ממשית או מרוכבת) לכסינה אוניטרית (מעל $\mathbb{C}$) אם"ם היא נורמלית.

משפט: תהי A מטריצה נורמלית מעל F. ו"ע של A השייכים לע"ע שונים, אורתוגונליים זה לזה (ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית ב- F^n).

סע' 3

השיטה ללכסון אוניטרי זהה לחלוטין לשיטת הלכסון האורתוגונלי של מטריצה סימטרית ממשית.

דוגמא: מצאו מטריצה אוניטרית המלכסנת את: $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

פתרון: נמצא את הע"ע של A.

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&0\\1&\lambda-1&0\\0&0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda^2-2\lambda+2)$$

אנו מקבלים שהע"ע הם: $\lambda_1=1$, $\lambda_2=1+i$, $\lambda_3=1-i$.

כיוון שקיבלנו 3 ע"ע שונים והריבוי של כל ע"ע הוא 1, מספיק למצוא עבור כל ע"ע וקטור עצמי.

א. עבור $\lambda_1=1$ נקבל את הו"ע: $v_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ שהוא מנורמל.

ב. עבור $\lambda_2=1+i$ נקבל את הו"ע: $v_2'=\begin{pmatrix}-i\\1\\0\end{pmatrix}$ ולאחר נירמול

נקבל את הוקטור האורתונורמלי הבא: $v_2=\begin{pmatrix}\frac{-i}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt2}\\0\end{pmatrix}$.

ג. עבור $\lambda_3=1-i$ נקבל את הו"ע: $v_3'=\begin{pmatrix}i\\1\\0\end{pmatrix}$ ולאחר נירמול

נקבל את הוקטור האורתונורמלי הבא: $v_3=\begin{pmatrix}\frac{i}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt2}\\0\end{pmatrix}$

(הנורמה של v_3' הוא: $\|v_3\|=\sqrt{i\cdot\bar{i}+1\cdot1+0\cdot0}=\sqrt2$)

לכן המטריצה האוניטרית היא:

$$Q=\begin{bmatrix}0&\frac{-i}{\sqrt2}&\frac{i}{\sqrt2}\\0&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\\1&0&0\end{bmatrix}.$$