אינפי 1 – מדמ"ח – פתרון תרגיל 1

הבינום של ניוטון

.1

I. $(x-y^2)^6=x^6-6x^5y^2+15x^4y^4-20x^3y^6+15x^2y^8-6xy^{10}+y^{12}$

II. $(x^2+3)^3=x^{12}+18x^{10}+135x^8+540x^6+1215x^4+1458x^2+729$

III. $(\frac{1}{2}+\sqrt{2})^5=\frac{401}{32}+\frac{149}{16}\sqrt{2}$

IV. $(\sqrt{x}-\frac{1}{x})^6=x^3-6x^{3/2}+15-20x^{-3/2}+15x^{-3}-6x^{-9/2}+x^{-6}$

2. איבר כללי לאחר פתיחת סוגריים נראה כך: $\binom{7}{k}(\frac{2}{x})^k(-\sqrt{x})^{7-k}=\pm\binom{7}{k}2^k x^{-k}x^{\frac{7-k}{2}}=\pm\binom{7}{k}2^k x^{\frac{7-3k}{2}}$ (באשר הסימן נקבע בהתאם לזוגיות/אי-זוגיות k). אנחנו מחפשים מתי $\frac{7-3k}{2}=\frac{1}{2}$, וזה קורה כאשר $k=2$. לכן נציב זאת כדי למצוא את המקדם: $-\binom{7}{2}2^2=-84$.

3. באותו האופן נקבל כי המקדם הוא $\frac{231}{16}$.

4. באותו האופן נקבל כי המספר החופשי הוא 70.

כפל בצמוד

1. $\frac{4-x}{2-\sqrt{x}}=\frac{(4-x)(2-\sqrt{x})}{(2-\sqrt{x})(2+\sqrt{x})}=\frac{(4-x)(2-\sqrt{x})}{4-x}=2-\sqrt{x}$

2.

$$\frac{4-x}{x-\sqrt{3x+4}}=\frac{(4-x)(x+\sqrt{3x+4})}{(x-\sqrt{3x+4})(x+\sqrt{3x+4})}=\frac{(4-x)(x+\sqrt{3x+4})}{x^2-3x-4}=\frac{(4-x)(x+\sqrt{3x+4})}{x^2-3x-4}=$$

$$=\frac{(4-x)(x+\sqrt{3x+4})}{(x-4)(x+1)}=\frac{-(x+\sqrt{3x+4})}{(x+1)}$$

3.

$$\frac{x}{\sqrt[3]{x+1}-1}=\frac{x((x+1)^{2/3}+(x+1)^{1/3}+1)}{((x+1)^{1/3}-1)((x+1)^{2/3}+(x+1)^{1/3}+1)}=\frac{x((x+1)^{2/3}+(x+1)^{1/3}+1)}{x}=(x+1)^{2/3}+(x+1)^{1/3}+1$$

חזרה על טכניקה אלגברית

.1

I. $\frac{32x^2-2}{(1-4x)(2x-7)}=\frac{2(4x-1)(4x+1)}{(1-4x)(2x-7)}=\frac{-2(4x+1)}{2x-7}$

II. $\frac{x^2y^2-1}{xy+1}=\frac{(xy-1)(xy+1)}{xy+1}=xy-1$

III. $\frac{5a^2-16a+12}{5a^3-a^2-6a}=\frac{(a-2)(5a-6)}{a(5a^2-a-6)}=\frac{(a-2)(5a-6)}{a(a+1)(5a-6)}=\frac{a-2}{a(a+1)}$

IV.

$$\frac{n^4-m^4}{n^2-3nm+2m^2}\cdot\frac{n^2-nm-2m^2}{n^2+m^2}=\frac{(n^2-m^2)(n^2+m^2)}{(n-2m)(n-m)}\cdot\frac{(n-2m)(n+m)}{n^2+m^2}=$$

$$=\frac{(n-m)(n+m)(n^2+m^2)}{(n-2m)(n-m)}\cdot\frac{(n-2m)(n+m)}{n^2+m^2}=(n+m)^2$$

2.

I. תחום ההגדרה הוא $-2x^2+6x+1\geq 0$ כלומר $\frac{3-\sqrt{11}}{2}\leq x\leq\frac{3+\sqrt{11}}{2}$. נפתור ראשית את המשוואה המתאימה ע"י העלאה בריבוע: $\sqrt{-2x^2+6x+1}=2x+1$ כלומר $-2x^2+6x+1=(2x+1)^2$ כלומר $x_{1,2}=0,\frac{1}{3}$. העלנו בריבוע (פעולה לא הפיכה) ע"כ יש לבדוק את הפתרונות ע"י הצבה במשוואה ואכן שניהם מקיימים אותה. נחזור לפתרון אי-השוויון: 2 הנקודות שלנו מפצלות את תחום ההגדרה ל-3 תחומים וע"כ נשאר להציב 3 נקודות מתחומים אלו באופן שרירותי ולבדוק האם אי-השוויון מתקיים שם. הצבה מראה כי הפתרון הוא $0<x<\frac{1}{3}$.

II. תחום ההגדרה הוא $-5\leq x\leq 8$. נפתור את המשוואה המתאימה: $\sqrt{x+5}=1+\sqrt{8-x}$ ע"י העלאה בריבוע: $x+5=1+2\sqrt{8-x}+8-x$. כלומר $\sqrt{8-x}=x-2$ והעלאה נוספת בריבוע תתן $x_{1,2}=-1,4$. יש לבדוק את הפתרונות בגלל פעולת ההעלאה בריבוע – אכן שניהם מקיימים את המשוואה. כעת נחזור לפתרון אי-השוויון: שני הפתרונות מחלקים את תחום ההגדרה לשלושה קטעים. נציב נקודה כלשהי בכל אחד מהקטעים כדי לבדוק אם אי-השוויון מתקיים שם, ונקבל כי הפתרון הוא $-5\leq x<4$.