תרגול 3

פונקציות רציפות:

1. הגדרה: תהי $f:(X,d)\to(Y,\rho)$ פונקציה בין מרחבים מטריים. נאמר שf היא רציפה ב$x\in X$ אם מתקיים התנאי הבא:

$$\forall\epsilon>0,\exists\delta>0,\forall y\in X,d(x,y)<\delta\implies\rho(f(x),f(y))<\epsilon$$

שימו לב שההגדרה מקבילה להגדרה באינפי, כאשר במקום ערך מוחלט משתמשים במטריקה כללית.
תנאי שקול לרציפות בx הוא התנאי הבא: לכל סדרה $x_n\to x$, מתקיים: $f(x_n)\to f(x)$.
בנוסף, נאמר שפונקציה היא רציפה אם היא רציפה בכל נקודה.

2. בהרצאה הוכחתם את השקילויות הבאות:

   (א) $f:(X,d)\to(Y,\rho)$ רציפה.

   (ב) לכל $A\subseteq Y$ פתוחה, $f^{-1}(A)$ פתוחה בX.

   (ג) f שומרת על התכנסות סדרות. כלומר, אם $x_n\to x$, אז $f(x_n)\to f(x)$.

3. הגדרות נוספות: פונקציה $f:(X,d)\to(Y,\rho)$ נקראת "פונקציית ליפשיץ" אם קיים $k\in\mathbb{R}$ כך שלכל $x,y\in X$ מתקיים:

$$\rho(f(x),f(y))\leq kd(x,y)$$

פונקציה נקראת רציפה במ"ש (במידה שווה) אם לכל $\epsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $x,y\in X$ מתקיים:

$$d(x,y)<\delta\implies\rho(f(x),f(y))<\epsilon$$

בהרצאה הוכחתם שכל פונקציית ליפשיץ רציפה במ"ש, וכל פונקציה רציפה במ"ש רציפה.

4. תרגיל: הוכיחו כי פונקציית ההטלה על רכיב i, $P_i:(l_\infty,d_\infty)\to(\mathbb{R},|\cdot|)$ ($P_i((x_n))=x_i$)
למשל:

$$P_i(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},...)=\frac{1}{i}$$

היא לפשיץ

5. תרגיל: אם $f:(X,d)\to(Y,\rho)$ רציפה במ״ש אז תמונה של סדרת קושי $\{x_n\}$היא קושי.

(א) הערה: עבור פונקציה רציפה שאינה רציפה במ"ש הטענה לא נכונה בהכרח. כלומר, אם $f:(X,d)\to(Y,\rho)$ רציפה, ו$(x_n)\subseteq X$ סדרת קושי, ייתכן ש$(f(x_n))$ אינה סדרת קושי.

פתיחות לפי תמונה הפוכה של פונקציה רציפה

1. הבחנה: אם ידוע ש$f:(X,d)\to(Y,\rho)$ היא פונקציה רציפה, אז ניתן להוכיח ש$A\subseteq X$ היא קבוצה פתוחה/ סגורה, אם היא שווה לתמונה ההפוכה של קבוצה פתוחה/ סגורה תחת f. כלומר, אם קיימת $B\subseteq Y$ פתוחה/ סגורה, כך ש$A=f^{-1}(B)$.

2. תרגיל: הוכיחו כי $A=\{(x,y):\ xy<1\}\subset\mathbb{R}^2$ פתוחה.

3. תרגיל (שיופיע בש"ב): יהי (X,d) מרחב מטרי, ו$a\in X$. אזי $f:(X,d)\to\mathbb{R}$ שמוגדרת ע״י $f_a(x)=d(x,a)$ רציפה.
תרגיל (מסקנה מהתרגיל הקודם): בכל מרחב מטרי, כדור סגור $B[a,r]$הוא קבוצה סגורה.

סגורים

1. הגדרה: תהי X תת קבוצה של מרחב מטרי. הסגור הסידרתי של X, מסומן ב$scl(X)$, הוא האוסף של כל הגבולות של סדרות מX. כלומר,

$$scl(X)=\{x:\exists\{x_n\}\subseteq X,x_n\to x\}$$

(א) תרגיל: במרחב l_∞ ניקח את התת קבוצה A של כל הסדרות שמתאפסות לבסוף.

$$A=\{(x_n)\in l_\infty:\exists n_0,\forall m>n_0,x_m=0\}$$

מהו $scl(A)$?

2. תרגיל: תהא $S\subseteq X$ סגורה ותהא $(s_n)\subseteq S$ סדרה מתכנסת: $s_n\to s$. אזי $s\in S$.

3. תרגיל: יהי (X,d) מ"מ, ו$A\subseteq X$. A סגורה אמ״מ היא מכילה את כל הגבולות של סדרות בתוכה. כלומר לכל $(a_n)\subseteq A$, אם $a_n\to x$ אז $x\in A$.

4. הגדרה: כעת נרצה להגדיר סגור של קבוצה (מסומן: $cl(A)$ או $\bar{A}$. יש מספר דרכים להגדיר את הסגור, כולן שקולות.
תרגיל: הוכיחו שההגדרות הבאות ל $cl(A)$ שקולות:

(א) $cl(A)=\{x:d(x,A)=0\}$

(ב) הקבוצה הסגורה הכי קטנה שמכילה את A. $cl(A)=\cap_{A\subseteq S}S$, כאשר $A\subseteq S$ סגורה. (שימו לב שמכיוון שחיתוך של קבוצות סגורות היא קבוצה סגורה, הקבוצה הסגורה הקטנה ביותר שמכילה את A מצקבלת ע"י חיתוך כל הקבוצות הסגורות שמכילות את A.)

5. תרגיל: לכל $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה הגרף שלה $G_f=\{(x,f(x))\}$ סגור ב $\mathbb{R}^2$.

6. תרגיל:תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, כך ש$G_f$ סגורה. האם f רציפה?

A' ונקודות מבודדות

1. הגדרה: יהי (X,d) מ"מ ו$A\subseteq X$. נקודת הצטברות של A היא נקודה x שקיימת סדרה ב $A\setminus\{x\}$ ששואפת אליה. בנוסף, מסמנים בA' את האוסף של כל נקודות ההצטברות. A' = נקודות הצטברות = $\{x:\ x\in scl(A\setminus\{x\}\}$

2. הגדרות שקולות לנקודת הצטברות. x היא נקודת הצטברות של A אם היא מקיימת את אחת מבין התנאים השקולים הבאים:

   (א) קיימת סדרה לא קבועה לבסוף $A\supseteq(a_n)$ ששואפת לx.

   (ב) קיימת סדרה שכל איבריה שונים $A\supseteq(a_n)$ ששואפת לx.

   (ג) לכל $\epsilon>0$, $(A\setminus\{x\})\cap B(x,\epsilon)\neq\emptyset$

   (ד) לכל $\epsilon>0$, קיים $A\ni a\neq x$ כך ש$d(x,a)<\epsilon$.

3. דוגמא בסיסית:

   (א) $A=(0,1)\cup\{2\}$. אזי $A'=[0,1]$.
   שימו לב כי לא מתקיימת הכלה בשום כיוון בין A לA'.

4. תרגיל: A סגורה $\iff$ $A'\subseteq A$.

5. תרגיל: הוכיחו שלכל קבוצה A, A' היא קבוצה סגורה.