אוניברסיטת תל- אביב
הפקולטה למדעים מדויקים

21.01.2003

בחינה בחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 1
לתלמידי מתמטיקה שנה א.
המורה: מ. אפשטיין

משך הבחינה: *3.5* שעות. אין להשתמש בחומר עזר כלשהו.
ענה על *4* מבין השאלות הבאות - לפחות אחת, אבל לא יותר משתיים מבין השאלות *1*, *2* ו- *3*. כל שאלה- *25* נקודות.

שאלה 1

תהי $A \subset R$ קומפקטית ו $f : A \to R$ פונקציה רציפה. הוכח כי:

א. $f(A)$ קונפקטית;

ב. הפונקציה f חסומה ומשיגה את חסמיה.

שאלה 2

(משפט *Bolzano*) יהי $I \subset R$ רווח ו $f : I \to R$ פונקציה רציפה. הוכח: אם $a,b \in I$ $a < b$ ו μ מספר בין $f(a)$ ו $f(b)$ אזי קיים c בין a ו b כך ש $f(c) = \mu$.

שאלה 3

א. (משפט *Fermat*) תהי $f : A \to R$ ו $x_0 \in A$ נקודת הצטברות של כל אחת מהקבוצות $A \cap (-\infty, x_0)$ ו $A \cap (x_0, +\infty)$. הוכח: אם x_0 היא נקודת אכסטרמום יחסי של f ויש לה נגזרת בנקודה זו, אזי $f'(x_0)=0$.

ב. תהי $f: I \to \mathbf{R}$ ו $x_0 \in I$ נקודה שבה f גזירה n פעמים ($n \geq 2$) ונניח כי:

$$f'(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0 \quad , \quad f^{(n)}(x_0)\neq 0$$

הוכח שאם n הוא זוגי, הנקודה x_0 היא נקודת אכסטרמום ו:
x_0 היא נקודת מינימום אם $f^{(n)}(x_0) > 0$ ונקודת מכסימום אם $f^{(n)}(x_0) < 0$.

שאלה 4

א. תהי $f : R \to R$ המוגדרת ע"י: $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ עבור $x \neq 0$, ו $f(0) = 1$.

הראה כי f גזירה וש- f' רציפה.

ב. יהיו a ו b מספרים חיובים. חשב את $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}$.

<u>שאלה 5</u>

א. תהי (a_n) סדרה כך ש: $0 < a_0 < 1$ ולכל $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \sin a_n$. הראה כי (a_n) מתכנסת.

ב. נתונה $f : [0,1] \to R$ פונקציה רציפה, המקיימת $f(\sin x) = f(x)$ לכל $x \in [0,1]$. הוכח כי f קבועה.

<u>שאלה 6</u>

א. הראה כי לכל $x > 0$ קיים $\frac{1}{1+x} < \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$.

ב. בדוק רציפות במדה שווה של הפונקציה $f(x) = x^{\frac{1}{2}}\cos\frac{1}{x}$, $x \in (0,\infty)$.

<u>שאלה 7</u>

א. כמה פתרונות ל- $f'(x) = 0$, כאשר $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ על R? נמק את תשובתך.

ב. הראה כי לכל $a \le b$ קיים : $\left|\sin\left(e^{-b}\right) - \sin\left(e^{-a}\right)\right| \le \frac{b-a}{e^a}$.

בהצלחה!!!

מבחן בחדו"א 1 תאריך: 21.01.2003

מורה: מ. אפשטיין

שאלה 1

נתון: $A\subset\mathbb{R}$ קומפקטית, כלומר סגורה וחסומה – ולכן בהכרח קטע סגור $A=[a,b]$;

$f:A\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה.

א. צ"ל: $f(A)$ סגורה וחסומה.

סגירות: תהי $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}\subset f(A)$ סדרה, המתכנסת ב- $\mathbb{R}$ לאיבר y. צריך להראות ש- $y\in f(A)$.
ואכן, $\{x_n\}\subset A$ ו- A חסומה, לכן לפי בולצנו-ויירשטרס נובע כי לכל סדרה ב-A יש תת-סדרה מתכנסת. תהי $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}\to x\in\mathbb{R}$ תת-סדרה כזו; כיוון ש-A סגורה, $x\in A$. כיוון ש- f רציפה, $\{f(x_{n_k})\}\to f(x)$. אבל מצד שני $\{f(x_{n_k})\}\to y$, כי זו תת-סדרה של $\{f(x_n)\}$. מיחידות הגבול מקבלים כי $y=f(x)$, כלומר $y\in f(A)$ כנדרש.

חסימות: נניח בשלילה ש- f לא חסומה. אז קיימת סדרה $\{x_n\}\subset A$ כך ש- $f(x_n)\xrightarrow{n\to\infty}\infty$.
(בניית הסדרה: לכל n, נבחר $x_n\in A$ כך ש- $|f(x_n)|>n$. מהנחת השלילה, זה אפשרי).
לפי משפט בולצנו-ויירשטס, כיוון ש- A חסומה, קיימת לסדרה זו תת-סדרה מתכנסת, וכיוון ש-A סגורה הגבול הוא ב-A: $\{x_{n_k}\}\xrightarrow{k\to\infty}c\in A$. מרציפות f, $f(c)=\lim\limits_{k\to\infty}f(x_{n_k})$, אך באותו זמן מתקיים $\lim\limits_{k\to\infty}f(x_{n_k})=\infty$, וזו סתירה!

ב. הוכחנו כבר ב-א', כי הפונקציה f חסומה (כלומר קבוצת הערכים שהיא מקבלת - $f(A)$ היא חסומה). נותר להראות שהיא משיגה את חסמיה.
נסמן: $M=\sup\limits_{x\in A}f(x),\ m=\inf\limits_{x\in A}f(x)$. מהגדרת inf, sup יש סדרות כך ש- $\{f(x_n)\}\to M,\ \{f(y_n)\}\to m$, כאשר $\{x_n\},\{y_n\}\subset A$. כמו קודם, מבולצנו ויירשטרס נובע כי יש תת-סדרות מתכנסות: $\{x_{n_k}\}\to c_1\in A,\ \{y_{n_k}\}\to c_2\in A$. ואז, מרציפות הפונקציה, נקבל:

$$f(c_1)=\lim_{k\to\infty}f(x_{n_k})=M$$
$$f(c_2)=\lim_{k\to\infty}f(y_{n_k})=m$$

- כלומר החסמים מתקבלים (כמינימום ומקסימום).

שאלה 2

נוכיח את הדרוש בשיטת החלוקה על הקטע $I\supset[a,b]$. תחילה נגדיר: $g(x)=f(x)-\mu$. צריך להראות כי $\exists c\in[a,b]:g(c)=0$. כעת, כיוון ש- μ בין $f(a)$ לבין $f(b)$, נובע ש- g שלילית באחד מקצות הקטע (a או b), וחיובית בשני. (בקיצור: $g(a)\cdot g(b)<0$). נניח בלי הגבלת הכלליות ש- $g(a)<0,\ g(b)>0$.

בשלב הראשון נגדיר $I_0=[a,b];\ d_0=\dfrac{a+b}{2}$. יש שלושה מקרים:

1. $g(d_0)=0$ - סיימנו את ההוכחה.
2. $g(d_0)<0$ - נגדיר: $I_1=[a_1,b_1],\ a_1=d_0,\ b_1=b$.
3. $g(d_0)>0$ - נגדיר: $I_1=[a_1,b_1],\ a_1=a_0,\ b_1=d_0$.

נמשיך את התהליך ע"י הגדרת $d_1=\dfrac{a_1+b_1}{2}$, וחלוקה לשלושה מקרים באופן דומה...

כך נגיע לסדרה אינסופית (אם לא סיימנות את ההוכחה בשלב סופי) של קטעים מוכלים:
$I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots$; $I_j = [a_j, b_j]$, עם התכונות:

$$1.\ g(a_j)\cdot g(b_j) < 0;$$

$$2.\ |I_j| = \frac{1}{2}|I_{j-1}| = \dots = 2^{-j}|I_0|$$

לפי הלמה של קנטור על קטעים מוכלים נובע כי: $\bigcap_{j=1}^{\infty} I_j \neq \varnothing$. מתכונה 2 (אורך הקטעים שואף לאפס),

נובע שיש נקודה יחידה בחיתוך: $\bigcap_{j=1}^{\infty} I_j = \{c\}$. נבדוק ש- $g(c)=0$:

$$a_n \to c \ \Rightarrow \lim_{n\to\infty} g(a_n) = g(c)$$
$$b_n \to c \ \Rightarrow \lim_{n\to\infty} g(b_n) = g(c)$$

(שים לב שזה נובע מרציפות g, אשר נובעת מרציפות f).

עכשיו: $g(c)^2 = \lim_{n\to\infty} g(a_n)\cdot \lim_{n\to\infty} g(b_n) = \lim_{n\to\infty}(g(a_n)\cdot g(b_n)) \le 0$ - השתמשנו בכך שגבול של מכפלה הוא מכפלת הגבולות, וכן בתכונה 1 למעלה.

קיבלנו $g(c)^2 \le 0 \Leftarrow g(c)=0$, כנדרש.

שאלה 3

א. נניח בשלילה כי $f'(x_0)\neq 0$, ובלי הגבלת הכלליות $f'(x_0) > 0$ (ההוכחה דומה למקרה השני).

לפי הגדרת הנגזרת, $0 < f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. מכאן הביטוי שבתוך הגבול חיובי בסביבה

מסויימת של x_0; כלומר קיים δ כך ש- $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0$ עבור כל x המקיים: $|x-x_0| < \delta$.

עבור $x_0 < x < x_0+\delta$ נכפול בביטוי החיובי $x-x_0$ (ולכן סימן האי שיויון לא ישתנה) ונקבל:
$f(x) > f(x_0)$.

עבור $x_0 > x > x_0-\delta$ נכפול בביטוי השלילי $x-x_0$ (ולכן סימן האי שיויון יתהפך) ונקבל:
$f(x) < f(x_0)$.

בסה"כ קיבלנו ש- f עולה בסביבה של x_0, וזאת בסתירה לכך ש- x_0 היא נקודת אכסטרמום מקומי של f. אם היינו מניחים בשלילה ש- $f'(x_0) < 0$ היינו מקבלים שהפונקציה יורדת בסביבת x_0, וגם זו סתירה באותו אופן. לכן בהכרח: $f'(x_0) = 0$.

ב. נפתח לטור טיילור את f(x) סביב הנקודה x_0, עד המקום ה- n (זה אפשרי, כי $f(x)$ גזירה n פעמים בנקודה זו):

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + r_n(x) =$$

$$= f(x_0) + 0 + \dots + 0 + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + r_n(x) = f(x_0) + (x-x_0)^n\left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \frac{r_n(x)}{(x-x_0)^n}\right)$$

(שים לב שהשתמשנו בנתון על הנגזרות ב- x_0).

כעת, נתון ש- $n=2k$ (זוגי), וכן $f^{(n)}(x_0)\neq 0$.

נניח תחילה ש- $f^{(n)}(x_0) > 0$. אז בסביבה קטנה של x_0 מקבלים:

$f(x) = a_0 + (x-x_0)^{2k}\left(a_{2k} + \frac{r_{2k}(x)}{(x-x_0)^{2k}}\right)$, כאשר $a_{2k} > 0$. (כרגיל, $a_i = \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}$).

למדנו בכיתה ש- $\lim_{x\to x_0}\frac{r_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$. מכאן, קיים $\delta > 0$ כך שלכל $|x-x_0| < \delta$ מתקיים

$\left|\frac{r_{2k}(x)}{(x-x_0)^{2k}}\right| < \frac{a_{2k}}{2}$. בפרט, $\frac{r_{2k}(x)}{(x-x_0)^{2k}} > -\frac{a_{2k}}{2}$. לכן לכל $|x-x_0| < \delta$ מתקיים:

$f(x) \ge a_0 + (x-x_0)^{2k}\frac{a_{2k}}{2} \ge a_0$, ושיוויון לאורך השורה מתקבל רק כאשר $x = x_0$ (כי $a_{2k}(x-x_0)^{2k} \ge 0$, וכאן משתמשים בזוגיות של n=2k וגם בחיוביות של המקדם a_{2k}). זאת אומרת, $f(x) > f(x_0),\ \forall x \ne x_0, |x-x_0| < \delta$ וזו בדיוק הגדרה של מינימום מקומי.

באופן דומה מאוד, אם $f^{(n)}(x_0) < 0$ אז $a_{2k} < 0$. שוב, יש $\delta > 0$ כך שלכל $|x-x_0| < \delta$ מתקיים:

$\left|\frac{r_{2k}(x)}{(x-x_0)^{2k}}\right| < -\frac{a_{2k}}{2}$ ובפרט $\frac{r_{2k}(x)}{(x-x_0)^{2k}} < -\frac{a_{2k}}{2}$. אז לכל x כזה מתקיים:

$f(x) \le a_0 + (x-x_0)^{2k}(a_{2k} - \frac{a_{2k}}{2}) = a_0 + (x-x_0)^{2k}\frac{a_{2k}}{2} \le a_0$, כאשר האי-שויון האחרון נובע מכך ש- $a_{2k} < 0, (x-x_0)^{2k} \ge 0 \Leftarrow a_{2k}(x-x_0)^{2k} \le 0$. שויון מתקבל רק ב- $x = x_0$, ולכן נקודה זו היא מקסימום. בכל מקרה קיבלנו שזו נקודת קיצון מקומית, וסיווגנו אותה לפי מקרים, כנדרש.

<u>שאלה 4</u>

$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \ne 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$.

עבור $x \ne 0$, הפונקציה גזירה כמנה של פונקציות גזירות, כשהמכנה לא מתאפס. הנגזרת היא (לפי נוסחת גזירת מנה במקרה כזה): $\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \frac{x\cdot\cos x - 1\cdot\sin x}{x^2}$, וזו פונקציה רציפה כמנה של פונקציות רציפות, כשהמכנה לא מתאפס.

עבור $x = 0$, נבדוק ישירות לפי ההגדרה: $f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{\sin h}{h}-1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin h - h}{h^2} \overset{(L)}{=} \lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{2h} \overset{(L)}{=} \lim_{h\to 0}\frac{-\sin h}{2} = 0.$$

כאשר (L) מסמן שימוש בכלל לופיטל, כלומר – אם המונה והמכנה שניהם שואפים לאפס (או לאינסוף), גבול מנת הפונקציות הוא כגבול מנת נגזרותיהן ($\lim f(x) = \lim g(x) = 0 (=\infty) \Rightarrow \lim\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\frac{f'(x)}{g'(x)}$). כאן בכל שלב המונה והמכנה שואפים לאפס, לכן אפשר להשתמש בלופיטל.

קיבלנו שהנגזרת ב-0 קיימת, ושווה ל-0. נותר להוכיח כי $\lim_{x\to 0} f'(x) = f'(0) = 0$. (כלומר f' רציפה). ואכן:

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}\overset{(L)}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x+x\sin x-\cos x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{2}=0$, כמו שהיה צריך

(שים לב לשימוש בלופיטל, שמוצדק משום שגם המכנה וגם המונה שואפים ל-0).

ב. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}=?$

נשים לב ש- $\lim\limits_{x\to 0}\cos cx=1 \Leftarrow \lim\limits_{x\to 0}\ln(\cos cx)=0$ עבור קבוע כלשהו c (זה נובע מרציפות הפונקציות $\cos,\ln$.) בפרט, זה נכון עבור הקבועים $c=a,b$, ולכן גם המונה וגם המכנה שואפים לאפס בביטוי שבתוך הגבול. לכן נוכל להשתמש בכלל לופיטל:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}\overset{(L)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-a\sin ax}{\cos ax}}{-\frac{b\sin bx}{\cos bx}}=\frac{a}{b}\lim_{x\to 0}\frac{\tan ax}{\tan bx}\overset{(L)}{=}\frac{a}{b}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{a}{\cos^2 ax}}{\frac{b}{\cos^2 bx}}=\frac{a^2}{b^2}\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 bx}{\cos^2 ax}=\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{1}{1}=\boxed{\frac{a^2}{b^2}}$$

שים לב לשימוש השני בכלל לופיטל: הוא מוצדק משום ש- $\lim\limits_{x\to 0}\tan cx=\tan 0=0$, לכן שוב המונה והמכנה שואפים (לחוד) ל-0. בנוסף נזכור ש- $(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$.

הערה: בכל שלב של גזירה (לפי לופיטל) השתמשנו בכלל השרשרת, בפרט בכך ש- $(f(ax))'=af'(ax)$.

<u>שאלה 5</u>

א. נראה כי הסדרה (a_n) היא מונוטונית יורדת וחסומה מלמטה, ומכאן ינבע (ע"פ משפט) שיש לה גבול.

נראה זאת באינדוקציה על n, כי $0<a_{n+1}<a_n$ (זה מראה את שני התנאים הדרושים גם יחד).

ידוע שעבור $0<x<\pi/2$ מתקיים $0<\sin x<x$ (*).

עבור n=0 מתקיים $0<a_0<1<\pi/2$, (ולכן החסם התחתון נכון), ולפי (*) נובע ש- $0<a_1=\sin a_0<a_0$. כעת נניח את טענתנו עבור n-1; זה אומר בפרט ש- $0<a_n<a_{n-1}<\pi/2$.

לכן אפשר להשתמש ב-(*) ולקבל: $0<a_{n+1}=\sin a_n<a_n$, כנדרש!

הוכחנו שהסדרה מונוטונית יורדת וחסומה ע"י 0, לכן היא מתכנסת.

הערה: יתר-על-כן, אפשר למצוא את הגבול $a=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ ע"י לקיחת גבול לשני צידי המשוואה: $a_{n+1}=\sin a_n$ ולקבל מרציפות הפונקציה sin כי:

$a=\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\sin a_n=\sin(\lim\limits_{n\to\infty}a_n)=\sin a$, וכיוון ש- $0\le a<\pi/2$ $\Leftarrow a=0$.

ב. יהי $x\in[0,1]$ כלשהו. נסמן $x=a_0$ ונגדיר סדרה כמו ב-א' ע"י $a_{n+1}=\sin a_n$.

מהנתון $f(\sin x)=f(x),\ \forall x\in[0,1]$ נובע כי $f(a_n)=f(\sin a_n)=f(a_{n+1})$ ולכן:

$\forall n\in\mathbb{N}\quad f(a_0)=f(a_1)=\ldots=f(a_n)$. עכשיו נקח גבול לשני האגפים החיצוניים של המשוואה האחרונה, ונשתמש ברציפות של f: $f(a_0)=\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)=f(\lim a_n)=f(0)$.

השויון האחרון נובע מההערה בסוף סעיף א', לפיה $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

הוכחנו כי לכל $x\in[0,1]$ מתקיים $f(x)=f(0)$, ולפיכך f היא פונקציה קבועה.

שאלה 6

א. צ"ל: $\frac{1}{1+x}<\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ לכל $x>0$.

נגדיר $h(x)=\ln(1+\frac{1}{x})-\frac{1}{1+x}$. צריך להוכיח: $\forall x>0: h(x)>0$. נבצע חקירה של $h(x)$. נגזור:

$$h'(x)=\frac{d}{dx}\left(\ln(1+\frac{1}{x})\right)-\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+x}\right)=\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)+\frac{1}{(1+x)^2}=$$

$$=\frac{-1}{x^2+x}+\frac{1}{(1+x)^2}=\frac{1}{x+1}\cdot\left(\frac{-1}{x}+\frac{1}{x+1}\right)$$

עכשיו, נשים לב ש- $x<x+1 \Rightarrow \frac{1}{x+1}<\frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}<0$, לכן הגורם השני במכפלה תמיד שלילי, ועבור $x>0$ מתקיים $\frac{1}{x+1}>0$, לכן הגורם הראשון במכפלה חיובי (בתחום שלנו). בסה"כ קיבלנו כי $h'(x)<0 \quad \forall x>0$, ולכן הפונקציה יורדת ממש בקרן $(0,\infty)$. בנוסף, $h(x)$ היא פונקציה רציפה בתחום זה, כהרכבה של פונקציות רציפות בתחום (שים לב שבכל המנות המכנה לא מתאפס). הגבולות של הפונקציה בקצות הקרן הן:

$$\lim_{x\to 0}h(x)=\lim_{x\to 0}\ln(1+\frac{1}{x})-\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x}=\infty-1=\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}h(x)=\lim_{x\to\infty}\ln(1+\frac{1}{x})-\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+x}=\ln(1+0)-0=0$$

מהחקירה מסיקים שהפונקציה רציפה ויורדת ממש, מ- $\lim_{x\to 0}h(x)=\infty$ ועד ל- $\lim_{x\to\infty}h(x)=0$.

כעת, נניח בשלילה כי $h(x_0)\le 0$ עבור נקודה מסוימת $x_0\in(0,\infty)$. כיוון שהפונקציה יורדת ממש, לכל $x>x_0$ מתקיים: $h(x)<h(x_0)\le 0$, ולכן $\lim_{x\to\infty}h(x)<h(x_0)\le 0$. זו סתירה לכך ש- $\lim_{x\to\infty}h(x)=0$.

מסקנה: $\forall x>0: h(x)>0$, וזה מוכיח את אי-השוויון.

ב. $x\in(0,\infty)$, $f(x)=x^{\frac{1}{2}}\cos\frac{1}{x}=\sqrt{x}\cos\frac{1}{x}$.

נוכיח שהפונקציה רציפה במידה שווה בתחום הנ"ל. קודם כל נשים לב שקיים הגבול הצדדי- $\lim_{x\to 0+}f(x)=\lim_{x\to 0+}\sqrt{x}\cos\frac{1}{x}=0$, כי הגורם השני חסום (ע"י 1), והגורם הראשון שואף ל-0. לכן, ניתן להרחיב את f(x) ברציפות ע"י הגדרת $f(0)=0$. (אם נוכיח שהפונקציה המורחבת רציפה במ"ש, אז בפרט גם הפונקציה הנתונה).

בקטע הסגור $[0,1]$, f(x) (המורחבת) רציפה, ולכן רציפה במידה שווה (לפי משפט קנטור).

בקרן $[1,\infty)$ נראה שזו פונקציית ליפשיץ (ונסביר למה זה מספיק). לשם כך נגזור לפי כלל המכפלה:

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos\frac{1}{x}+\sqrt{x}\cdot(-\sin\frac{1}{x})\cdot(-\frac{1}{x^2})=\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2}\cos\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}\right).$$

מכאן שהנגזרת חסומה בקרן זו:

$$|f'(x)|\le\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2}\left|\cos\frac{1}{x}\right|+\frac{1}{x}\left|\sin\frac{1}{x}\right|\right)\le\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{x}\right)\le 1\cdot\left(\frac{1}{2}+1\right)=\frac{3}{2}.$$

כעת, לפי משפט לגרנז', לכל $a<b$ קיים $c\in(a,b)$ כך ש

$|f(b)-f(a)|\le|f'(c)|\cdot(b-a)\le\frac{3}{2}(b-a)$. זהו בדיוק התנאי של פונקציית ליפשיץ. זה מוכיח

רציפות במ"ש (בקרן $[1,\infty)$): נלך לפי ההגדרה. יהי $\varepsilon>0$. נבחר $\delta=\frac{2}{3}\varepsilon$. אז לכל $x,y\in[1,\infty)$ המקיימים $|x-y|<\delta$, מתקיים: $|f(x)-f(y)|\le\frac{3}{2}|x-y|<\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\varepsilon=\varepsilon$, כנדרש.

כעת, הוכחנו רציפות במידה שווה בשני הקטעים $(0,1],[1,\infty)$ בנפרד. נראה רציפות במ"ש באיחוד $(0,\infty)$: יהי $\varepsilon>0$. לפי מה שהוכחנו, יש δ_1,δ_2 שמתאימות לכל אחד מהקטעים הנ"ל ועונות להגדרה של רציפות במ"ש עם $\frac{\varepsilon}{2}$. נגדיר $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, ונטען שמתקיימת כעת ההגדרה של רציפות במ"ש עבור ε, כלומר אם $|x-y|<\delta$ אז $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$. אכן, אם $x,y\in(0,1]$ או $x,y\in[1,\infty)$ זה נובע מיד (כי $\delta<\delta_1,\delta_2$ ולכן אפילו $|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2}$). אך אם הנקודות בקטעים שונים, בה"כ $x<1,y>1$, אז נעזר בא"ש המשולש כדי לקבל:

$|f(x)-f(y)|\le|f(x)-f(1)|+|f(1)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$, כנדרש.

<u>שאלה 7</u>

א. $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)\Leftarrow f(1)=f(2)=f(3)=f(4)=0$.
$f(x)$ פונקציה רציפה וגזירה, לכן ממשפט רול נובע כי קיימות נקודות $x_1\in(1,2),x_2\in(2,3),x_1\in(3,4)$ כך ש- $f'(x_i)=0,\ i=1,2,3$. מכיוון ש- $f'(x)$ היא פולינום מדרגה 3, יש לה לכל היותר 3 שורשים ממשיים. מכאן נובע כי יש בדיוק 3 פתרונות ל- $f'(x)=0$.

ב. צ"ל: $|\sin(e^{-b})-\sin(e^{-a})|\le\frac{b-a}{e^a}$ עבור $a\le b$.

נשים לב שאם $a=b$ אז יש שויון (שני האגפים מתאפסים). נניח לכן ש- $a<b$, ונתבונן בפונקציה $f(x)=\sin(e^{-x})$. זו פונקציה רציפה וגזירה ב-$[a,b]$, ולכן לפי משפט לגרנז', קיים $c\in(a,b)$ כך ש- $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{\sin(e^{-b})-\sin(e^{-a})}{b-a}$. כעת נקח ערך מוחלט בשני האגפים. מכאן נשאר להראות כי- $|f'(c)|\le e^{-a}$. נגזור לפי כלל השרשרת: $f'(x)=\left(\sin(e^{-x})\right)'=\cos(e^{-x})\cdot(-e^{-x})$.
עבור $c\in(a,b)$, מקבלים: $|f'(c)|=|\cos(e^{-c})|\cdot|e^{-c}|\le1\cdot e^{-c}\le e^{-a}$. (שים לב שהפונקציה e^{-x} חיובית ויורדת ממש).

לסיכום, הראינו ש- $\frac{|\sin(e^{-b})-\sin(e^{-a})|}{b-a}=|f'(c)|\le e^{-a}$, כנדרש.

לחורף א' סמ' א'
תשס"ד

3.02.2004

אוניברסיטת תל-אביב
הפקולטה למדעים מדוייקים

בחינה בחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 1
לתלמידי מתמטיקה שנה א.
המורה: מ. אפשטיין

משך הבחינה: 3 שעות . אין להשתמש בחומר עזר כלשהו.
ענה על 4 מבין השאלות הבאות - לפחות אחת , אבל לא יותר משתיים מבין שאלות 1 , 2 ו- 3.
כל שאלה- 25 נקודות.

<u>שאלה1</u>

תהי f פונקציה רציפה על קבוצה $A \subset \mathbf{R}$ קומפקטית.
הוכח כי f רציפה במידה שווה על A (משפט ***Heine***) .

<u>שאלה 2</u>

תהי (a_n) סדרת ממשיים.
הוכח כי הסדרה (a_n) מתכנסת,אם ורק אם היא סדרת *Cauchy*. (הקריטריון של *Cauchy* להתכנסות).

<u>שאלה 3</u>

יהי I רווח ו- $f : I \to R$, פונקציה גזירה.
הוכח כי f' מקבלת, יחד אם כל שני ערכים שלה, כל ערך ביניהם (משפט *Darboux*).

<u>שאלה 4</u>

א. הסדרה (a_n) מוגדרת ע"י: $a_1 = 1$ ולכל $n \in \mathbf{N}^*$, $a_{n+1} = 3 - \frac{1}{a_n}$. הוכח כי לסדרה קיים גבול וחשב אותו.

ב. הוכח כי למשוואה $\frac{1}{x} = \sin x$ יש אינסוף פיתרונות.

<u>שאלה 5</u>

א.תהי f פונקציה רציפה על $[0,\infty)$ ונניח שקיימים מספרים a ו b , כך שקיים $\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$.הוכח כי f רציפה במידה שווה על $[0,\infty)$.

ב. חשב את $\lim_{x\to 0}\left[\frac{\ln(\cos x)}{x\sqrt{1+x}-x}\right]$.

F-69

שאלה 6

א. נתונה הפונקציה: $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x\ln x}{x-1} & , \quad 0<x<1 \\ \dfrac{1+x}{x} & , \quad 1\le x \end{cases}$. בדוק: רציפות ,גזירות ומונוטוניות של f.

ב. הראה שאם f היא פונקציה רציפה על $[a,b]$ ו $f(a)=f(b)$, אזי f איננה חד-חד ערכית על (a,b).

שאלה 7

תהי f פונקציה גזירה פעמיים ברווח $[0,2]$ ו : $f(2)=2, f(1)=0, f(0)=1$.השתמש במשפט ***Lagrange*** והראה כי:

א. קיימת נקודה a ב-$[0,2]$, עבורה $f'(a)=0$.

ב. קיימת נקודה c ב-$[0,2]$, עבורה $f''(c)>0$.

מחברת מס׳ ____
מתוך ____ מחברות

TEL AVIV UNIVERSITY אוניברסיטת תל-אביב

9

לפני התחלת הבחינה מלא את כל הפרטים הבאים בכתב ברור וקרא בעיון את ההוראות:

1. על הנבחן להיבחן רק בחדר שבו הוא רשום. 25
2. עם הכניסה לחדר הבחינה יש להניח את החפצים בצד לרבות מכשירי קשר ואמצעי תקשורת אחרים כשהם כבויים. 25
3. אסור להחזיק בהישג יד, בחדר הבחינה או בסמוך לו, כל חומר הקשור לבחינה/לקורס פרט לחומר שהשימוש בו הותר בכתב על ידי המורה.
4. יש למלא את הפרטים על מחברת הבחינה במקום המיועד לכך בלבד. אין לכתוב את השם או כל פרט מזהה אחר בתוך המחברת. 25
5. יש להישמע להוראות המשגיח. נבחן לא יעזוב את מקומו ללא קבלת רשות המשגיח. הפונה בשאלה או בבקשה ירים את ידו. 7 25
6. נבחן שנכנס לחדר הבחינה וקיבל את השאלון (טופס הבחינה) לידו ייחשב כמי שנבחן במועד זה. היה והחליט לא לכתוב את הבחינה, לא יהא רשאי לעזוב את חדר הבחינה, אלא כעבור חצי שעה ממועד תחילתה ולאחר שהחזיר את המחברת והשאלון. ציונו בבחינה יהיה "0".
7. קריאת השאלון מותרת רק לאחר קבלת רשות המשגיח.
8. יש לכתוב את התשובות בעט, בכתב יד ברור ונקי. נבחן הבוחר לכתוב טיוטה יעשה זאת בעמודו הימני של דפי מחברת הבחינה ויציין בראש העמוד "טיוטה". אין לתלוש דפים מהמחברת.
9. מחברות הבחינה שקיבל הנבחן תהיינה בפיקוחו ובאחריותו במשך כל הבחינה. בעת יציאה מן החדר יופקדו המחברות והשאלון בידי המשגיח.
10. בתום הבחינה יחזיר הנבחן את המחברות והשאלון ויקבל מידי המשגיח את כרטיס הנבחן.
11. הנוהג בניגוד להוראות ול"נוהל סדרי בחינות ודיווח ציונים" צפוי להפסקת בחינתו ואף להעמדה לדין משמעתי.
12. אין לכתוב מעבר לקו האדום משני צידי הדף.

בהצלחה.

100

לשימוש המורה הבוחן:

הציון	100
המחברת נבדקה ביום	
חתימת המורה	

תאריך הבחינה 3.2.2004

שם הקורס [illegible]

שם המורה [illegible]

החוג/המגמה [illegible]

מס׳ זיהוי
(העתק מכרטיס הנבחן/התלמיד)
[redacted]

44801

03661101011
040918609
9

שאלה 1

תהי f פונקציה רציפה על קבוצה $A\subset\mathbb{R}$ קומפקטית.

נניח כי f <u>אינה</u> רציפה במידה שווה על A.

אזי, קיים $\varepsilon_0>0$ כך שלכל $\delta>0$ קיימים $x\in A$ ו- $y\in A$

כך ש: $0<|x-y|<\delta$ וגם $|f(x)-f(y)|\ge\varepsilon_0$.

בפרט, לכל $n\in\mathbb{N}^*$ קיימים x_n ו- y_n המקיימים:

$0<|x_n-y_n|<\frac{1}{n}$ וגם $|f(x_n)-f(y_n)|\ge\varepsilon_0$. (1)

על-פי משפט: קבוצה היא קומפקטית אם ורק אם

לכל סדרה שאיבריה בקבוצה יש נקודת גבול בקבוצה.

בפרט, הסדרה (x_n) אשר ב-A הקומפקטית מכילה תת-סדרה (x_{n_k}) המתכנסת

לאבר ב-A. תהי $x_{n_k}\to x_0$, $x_0\in A$. מ-(1) נובע שלכל $k\in\mathbb{N}^*$

קיים $0<|x_{n_k}-y_{n_k}|<\frac{1}{n_k}$. לכן $\lim(y_{n_k}-x_{n_k})=0$ ומתקיים:

$$\lim y_{n_k}=\lim(y_{n_k}-x_{n_k}+x_{n_k})=\lim(y_{n_k}-x_{n_k})+\lim x_{n_k}=$$
$$=\lim x_{n_k}=x_0. \Rightarrow y_{n_k}\to x_0.$$

הוכחנו שהסדרות (x_{n_k}) ו- (y_{n_k}) מתכנסות שתיהן ל- x_0.

ומכיוון ש-f רציפה, קיים $f(x_{n_k})\to f(x_0)$ ו- $f(y_{n_k})\to f(x_0)$,

ולכן $\lim(f(y_{n_k})-f(x_{n_k}))=0$, כלומר עבור <u>כל</u> $\varepsilon>0$ קיים

$N\in\mathbb{N}^*$ כך ש- $|f(x_{n_k})-f(y_{n_k})|<\varepsilon \Leftarrow k\ge N$. אך <u>זוהי סתירה</u>

לכך שעל-פי (1) לכל $k\in\mathbb{N}^*$ מתקיים $|f(x_{n_k})-f(y_{n_k})|\ge\varepsilon_0$.

לכן f רציפה במידה שווה על A. ✓

שאלה 2
בצד השני של הדף

שאלה 2

סדרה ממשית (a_n) היא סדרת Cauchy אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\nu\in\mathbb{N}^*$ כך שאם $n\ge\nu$ ו- $m\ge\nu$ $(n,m\in\mathbb{N}^*)$ אז $|a_n-a_m|<\varepsilon$.

<u>נראה שכל סדרה מתכנסת היא סדרת Cauchy:</u>

תהי סדרה ממשית (a_n) מתכנסת, ויהי $\lim a_n=l$ (1).

מ-(1) נובע שלכל $\varepsilon>0$ קיים $\nu\in\mathbb{N}^*$ כך ש $n\ge\nu$ גורר $|a_n-l|<\frac{\varepsilon}{2}$. לכן, אם $n,m\ge\nu$ מתקיים:

$$|a_n-a_m|=|a_n-l+l-a_m|\le|a_n-l|+|a_m-l|\le\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

(אי-שוויון המשולש, כמובן)

לכן (a_n) היא סדרת Cauchy.

<u>נראה שכל סדרת Cauchy היא מתכנסת:</u>

תהי (a_n) סדרת Cauchy. אזי לכל $\varepsilon>0$ קיים $\nu\in\mathbb{N}^*$ כך שלכל $n,m\ge\nu$ קיים $|a_n-a_m|<\frac{\varepsilon}{2}$ (1).

כל סדרת Cauchy היא <u>חסומה</u>, מכיוון שמתקיים לכל $n\in\mathbb{N}^*$ $|a_n|\le\max\{|a_1|,\dots,|a_{\nu-1}|,|a_\nu|+1\}$, לכן, לפי הלמה של Cesaro, הסדרה (a_n) מכילה תת סדרה מתכנסת, (a_{n_k}), יהי $\lim a_{n_k}=l$ (2).

מ-(2) נובע כי קיים $k_0\in\mathbb{N}^*$ כך ש- <u>$n_{k_0}\ge\nu$</u>, ו- $|a_{n_{k_0}}-l|<\frac{\varepsilon}{2}$ (3).

לכן, לכל $n\ge\nu$ מתקיים לפי (1) ו-(3):

$$|a_n-l|=|a_n-a_{n_{k_0}}+a_{n_{k_0}}-l|\le|a_n-a_{n_{k_0}}|+|a_{n_{k_0}}-l|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

לכן (a_n) היא סדרה מתכנסת.

שאלה 4

א. $a_1=1$. $a_{n+1}=3-\frac{1}{a_n}$. $a_2=3-\frac{1}{1}=2$ $a_3=3-\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$ ...

נניח כי לסדרה קיים גבול סופי והוא L. אם L אכן קיים, הוא שווה ל: $L=3-\frac{1}{L} \Leftarrow L^2=3L-1$

$\Leftarrow L^2-3L+1 \Leftarrow L_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9-4}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$.

(מכיון שעבור $n\ge N$ $|a_{n+1}-a_n|<\varepsilon$ ... ומתקיים לשוויון).

~~נראה כי (a_n) מונוטונית עולה:~~

~~1. נבדוק עבור a_2, a_1: $a_2=2>a_1=1$.~~

~~2. נניח את נכונות האינדוקציה עבור a_n ונוכיח עבור a_{n+1}:~~

~~$a_{n+1}\overset{?}{>}a_n \Leftarrow 3-\frac{1}{a_n}\overset{?}{>}a_n \Rightarrow$~~

נראה כי (a_n) חסומה - $1\le a_n<3$

1. נבדוק עבור a_1,a_2: $a_1=1$ ולכן $1\le a_1<3$, $a_2=2$ ולכן $1\le a_2<3$.

2. נניח את נכונות האינדוקציה עבור a_n ונוכיח עבור a_{n+1}:

$1\overset{?}{\le}a_{n+1}\overset{?}{<}3 \Rightarrow 1\overset{?}{<}3-\frac{1}{a_n}\overset{?}{<}3$

וזה אכן מתקיים מכיון שעפ"י ההנחה, $1\le a_n<3$ ולכן $\frac{1}{3}<\frac{1}{a_n}\le 1$ (ו- $1<3-1=2<3$ ו- $1<3-\frac{1}{3}<3$).

נראה כי (a_n) מונוטונית עולה:

1. נבדוק עבור a_2: $a_2=2>a_1$
2. נניח את נכונות האינדוקציה עבור a_n: $a_n>a_{n-1}$.
3. נבדוק: $a_{n+1}\overset{?}{>}a_n \Leftrightarrow 3-\frac{1}{a_n}\overset{?}{>}3-\frac{1}{a_{n-1}} \Leftrightarrow -\frac{1}{a_n}\overset{?}{>}-\frac{1}{a_{n-1}} \Leftrightarrow \frac{1}{a_n}\overset{?}{<}\frac{1}{a_{n-1}} \Leftrightarrow a_n>a_{n-1}$ ✓ אכן מתקיים

הוכחנו ש-a_n מונוטונית וחסומה, ולכן עפ"י משפט Weierstrass יש לה גבול סופי. לפי הבדיקה בהתחלה, גבול זה הוא או $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ או $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$. אך מכיון ש- $\frac{3-\sqrt{5}}{2}<1$ ו- $3>a_n\ge 1$, הגבול הינו בהכרח $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

4 ב) יש להראות שלמשוואה $\sin x=\frac{1}{x}$ יש אינסוף פתרונות.

נגדיר $f(x)=\sin x-\frac{1}{x}$ ונראה של- $f(x)$ יש אינסוף שורשים בקטע $(1,\infty)$. $f(x)$ הינה פונקציה רציפה (ב- $(1,\infty)$) כהפרש בין שתי פונקציות רציפות.

נזכור שעבור כל x, $x\in(1,\infty)$, $0<\frac{1}{x}<1$.

כידוע, $\sin x$ הינה פונקציה מחזורית, המקיימת $\sin(\pi n)=0$ עבור כל $n\in\mathbb{N}^*$, ו- $\sin(\frac{\pi}{2}+2\pi n)=1$! אם כן, עבור כל מחזור של $\sin x$ יתקיים: $f(2\pi n)=\sin(2\pi n)-\frac{1}{2\pi n}=0-\frac{1}{2\pi n}<0$

וכן: $f(2\pi n+\frac{\pi}{2})=\sin(2\pi n+\frac{\pi}{2})-\frac{1}{2\pi n+\frac{\pi}{2}}=1-\frac{1}{2\pi n+\frac{\pi}{2}}>0$.

עבור כל $n\in\mathbb{N}^*$, נתבונן בקטע $[2\pi n,2\pi n+\frac{\pi}{2}]$.

על-פי משפט ערך הביניים של קושי, מכיוון ש- $f(x)$ רציפה עליה תקבל בתחום זה כל ערך בין $f(2\pi n)<0$ ל- $0<f(2\pi n+\frac{\pi}{2})$, ולכן עבור כל מחזור של $\sin x$ קיים x_n כך ש- $x_n\in[2\pi n,2\pi n+\frac{\pi}{2}]$ ו- $f(x_n)=0$.

לכן קיימים אינסוף שורשים ל- $f(x)$ ולכן אינסוף פתרונות למשוואה $\sin x=\frac{1}{x}$.

אוניברסיטת תל-אביב
אוניברסיטת תל-אביב
אוניברסיטת תל-אביב

שאלה ד:

f גזירה פעמיים ב- $[0,2]$. $f(0)=1$ $f(1)=0$ $f(2)=2$.

f גזירה ולכן רציפה ב- $[0,2]$, ומקיימת את תנאי משפט Lagrange:
בכל תת קטע שלה.

א. נפעיל את משפט Lagrange בקטע $[1,2]$: קיימת $a_1\in(1,2)$ כך ש:

$$f'(a_1)=\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=\frac{2-0}{1}=2$$

נפעיל את משפט Lagrange בקטע $[0,1]$. קיימת $a_2\in(0,1)$ כך ש:

$$f'(a_2)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\frac{0-1}{1}=-1$$

מכיוון של- f' מקיימת Darboux (ערך ביניים), קיימת $a\in(a_2,a_1)$
כך ש- $\underline{f'(a)=0}$ (כי $f'(a_1)>0$ ו- $f'(a_2)<0$, ו- f' מקבלת כל ערך בין $f'(a_1)$ ל- $f'(a_2)$).

ב. מסעיף א ידוע שמכיוון ש- $a_1\in(1,2)$ ו- $a_2\in(0,1)$ אזי $a_1>a_2$.
מכיוון שנתון ש- f' גזירה ב- $[0,2]$, אזי היא גם גזירה
ב- (a_2,a_1) ורציפה ב- $[a_2,a_1]$, ולכן ניתן להפעיל את
משפט Lagrange בקטע $[a_2,a_1]$. קיימת c כך ש- $c\in(a_2,a_1)$
כך ש:

$$f''(c)=\frac{f'(a_1)-f'(a_2)}{a_1-a_2}=\frac{2-(-1)}{a_1-a_2}=\frac{3}{a_1-a_2}$$

ומכיוון ש- $a_1>a_2$ מתקיים $\frac{3}{a_1-a_2}>0$ ולכן $f''(c)>0$.

<u>מבחן בחדו"א 1</u> תאריך: 3.02.2004

מורה: מ. אפשטיין

<u>שאלה 1</u>

נניח בשלילה ש- f לא רציפה במידה שווה על A. זה אומר:

$$\exists\varepsilon>0 \quad \exists\{x_n\},\{y_n\}\subset A: |x_n-y_n|<\frac{1}{n},\ \ |f(x_n)-f(y_n)|\geq\varepsilon$$

(השתמשנו בשלילת הגדרת רציפות במ"ש: מצאנו ε כך שלכל $\delta>0$, ישנם $x,y\in A$ קרובים דיים- $|x-y|<\delta$ אבל ערכי הפונקציה רחוקים: $|f(x)-f(y)|\geq\varepsilon$.)

A קומפקטית ולכן חסומה, לכן הסדרה $\{x_n\}\subset A$ היא חסומה. לפי בולצנו-ויירשטרס נובע, כי קיימת תת-סדרה מתכנסת: $\{x_{n_k}\}\xrightarrow{k\to\infty}c$, ומכיוון ש- A סגורה נסיק ש- $c\in A$.

קל לראות שגם $\{y_{n_k}\}\xrightarrow{k\to\infty}c$, כי : $y_{n_k}=(y_{n_k}-x_{n_k})+x_{n_k}\xrightarrow{k\to\infty}0+c$.

לבסוף:

$$\varepsilon\overset{(1)}{\leq}|f(x_{n_k})-f(y_{n_k})|\overset{(2)}{\leq}|f(x_{n_k})-f(c)|+|f(y_{n_k})-f(c)|\xrightarrow[(3)]{k\to\infty}0$$

כאשר (1) נובע מההנחה, (2) מאי-שויון המשולש, ו-(3) מרציפות הפונקציה.

קיבלנו סתירה, ולכן הנחתינו ש- f אינה רציפה במ"ש שגוייה.

<u>שאלה 2</u>

נזכר בהגדרה: סדרה $\{a_n\}$ היא סדרת קושי אם $\forall\varepsilon\ \exists N:\forall m,n>N\ \ |a_n-a_m|<\varepsilon$.

<u>משפט:</u> הסדרה $\{a_n\}$ מתכנסת $\Leftrightarrow$ היא סדרת קושי.

<u>הוכחה:</u> ($\Leftarrow$) ידוע כי הסדרה מתכנסת, נאמר לגבול a $a_n\xrightarrow{n\to\infty}a$. אז מהגדרת התכנסות,

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N:\forall n>N\ |a_n-a|<\varepsilon$$

$$\forall m>N\ |a_m-a|<\varepsilon$$

ואז מאי-שויון המשולש: $|a_n-a_m|\leq|a_n-a|+|a-a_m|<\varepsilon$, וזאת לכל $\forall n,m>N$, כנדרש בתנאי קושי. (לכל ε מצאנו N שמקיים את ההגדרה).

($\Rightarrow$) כעת ידוע שהסדרה מקיימת את תנאי קושי, ויש להוכיח כי היא מתכנסת. תחילה נשים לב שהסדרה חסומה: עבור $\varepsilon=1$ קיים N כך ש- $\forall n>N\ |a_n-a_{N+1}|<1$ (מתנאי קושי כאשר $m=N+1$), ולכן $a_{N+1}-1<a_n<a_{N+1}+1,\ \forall n>N$.

לפי משפט בולצנו-ויירשטרס לסדרות, יש ל- $\{a_n\}$ תת-סדרה $\{a_{n_k}\}$ המתכנסת. נסמן: $l=\lim\limits_{k\to\infty}a_{n_k}$.(1)

יהי $\varepsilon>0$. כיוון ש- $\{a_n\}$ היא סדרת קושי, קיים N טבעי כך שאם $m,n>N$ אזי $|a_m-a_n|<\frac{\varepsilon}{2}$. (2)

מ-(1) נובע שקיים k_0 כך ש- $k_0>N$ וגם $|a_{k_0}-l|<\frac{\varepsilon}{2}$.

היות ו- $k_0>N$, נקבל מ-(2) כי לכל $n>N$ מתקיים $|a_n-a_{n_{k_0}}|<\frac{\varepsilon}{2}$. כעת מאי-שוויון המשולש:

$$|a_n-l|\leq|a_n-a_{n_{k_0}}|+|a_{n_{k_0}}-l|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,\quad \forall n>N$$

ומכאן קיבלנו $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=l$.

שאלה 3

ניסוח מדויק של המשפט: תהי $f(x)$ פונקציה גזירה בקטע $[a,b]$, אזי הנגזרת שלה מקבלת בפנים הקטע כל ערך הנמצא בין $f'_+(a)$ ו $f'_-(b)$.

__הוכחה:__ נניח כי $f'_+(a) < f'_-(b)$, ויהי $f'_+(a) < \gamma < f'_-(b)$. נוכיח כי קיימת נקודה פנימית c כך ש- $f'(c) = \gamma$.

נתבונן בפונקציה $F(x) = f(x) - \gamma x$ המוגדרת לכל $a \le x \le b$. $F(x)$ גזירה בקטע הסגור $[a,b]$ ולכן גם רציפה בו, ומכאן קיימת נקודה $a \le c \le b$ שבה $F(x)$ מקבלת את המינימום (ממשפט על פונ' רציפה בקטע קומפקטי). לא יתכן ש- $c = a$ שכן לפי ההנחה:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{F(a+\Delta x) - F(a)}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} - \gamma = f'_+(a) - \gamma < 0$$

לכן קיים $\delta > 0$ כך שלכל $0 < \Delta x < \delta$ מתקיים $F(a+\Delta x) - F(a) < 0$, או $F(a+\Delta x) < F(a)$, כלומר זו לא נקודת מינימום.

לא יתכן ש- $c = b$, שכן לפי ההנחה:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{F(b+\Delta x) - F(b)}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{f(b+\Delta x) - f(b)}{\Delta x} - \gamma = f'_-(b) - \gamma > 0$$

לכן קיים $\delta' > 0$ כך שלכל $0 < \Delta x < \delta'$ מתקיים $F(b-\Delta x) > F(b)$, כלומר b זו לא נקודת מינימום.

מכאן מסיקים ש-$c \in (a,b)$. בנקודה זו $F(x)$ גזירה ולכן, לפי משפט פרמה, $F'(c) = 0$ (זו נקודת קיצון). אולם $F'(x) = f'(x) - \gamma$, לכן נקבל ש- $f'(c) = \gamma$.

במקרה בו $f'_+(a) > f'_-(b)$, נגדיר את $F(x)$ כמו קודם, ונראה באותו אופן שהמקסימום שלה לא מתקבל בקצוות, לכן שוב יש נקודת קיצון פנימית ונסיים כמו קודם.

שאלה 4

א. $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 3 - \frac{1}{a_n}$ (*). נראה שזו סידרה מונוטונית עולה וחסומה מלמעלה, ואז (ממשפט) יש לה גבול. נראה באינדוקציה ש- $0 < a_n < a_{n+1} < 3$, וזה יוכיח את הדרוש.

עבור $n = 1$ זה מתקיים, כי $0 < a_1 = 1 < a_2 = 2 < 3$.

נניח שמתקיימת הטענה עבור n ונוכיח ל- $n+1$:

$$a_n < a_{n+1} \Rightarrow -\frac{1}{a_n} < -\frac{1}{a_{n+1}} \Rightarrow \quad a_{n+1} = 3 - \frac{1}{a_n} < 3 - \frac{1}{a_{n+1}} = a_{n+2}$$

ובעזרת ההנחה ש-$a_{n+1} > 0$ נובע ש- $0 < a_{n+1} < a_{n+2} < 3$, כנדרש.

חישוב הגבול: נסמן $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. אז מלקיחת גבול ב-(*) נקבל:

$a = 3 - \frac{1}{a} \Leftarrow a^2 - 3a + 1 = 0 \Leftarrow a = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$, אבל $0 \le a \le 3$ (כגבול של סדרה שכל איבריה כאלה), ולכן $\boxed{a = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}}$.

ב. כדי להראות שלמשוואה $\sin x = \frac{1}{x}$ יש אינסוף פתרונות, נוכיח כי לפונקציה $f(x) = \sin x - \frac{1}{x}$ יש אינסוף שורשים. נעסוק בתחום $x \in (1,\infty)$. בתחום זה f רציפה. נשים לב שלכל $k \in \mathbb{N}$:

$$f\left((4k+1)\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{2}-\frac{1}{(4k+1)\frac{\pi}{2}}=1-\frac{1}{(4k+1)\frac{\pi}{2}}>0$$

$$f\left((4k+3)\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{3\pi}{2}+\frac{1}{((4k+3)\frac{\pi}{2})}=-1+\frac{1}{((4k+3)\frac{\pi}{2})}<0$$

ולכן מרציפות $f(x)$ יש $x_k\in\left((4k+1)\frac{\pi}{2},(4k+3)\frac{\pi}{2}\right)$ כך ש- $f(x_k)=0$ (משפט ערך הביניים), זאת לכל $k\in\mathbb{N}$. אלה אינסוף שורשים של הפונקציה, או פתרונות של המשוואה המקורית, כנדרש.

<u>שאלה 5</u>

א. ניזכר בהגדרה: $f(x)$ רציפה במידה שווה אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך ש- $|x-y|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(y)|<\varepsilon$ לכל x,y בתחום.

כעת נחזור לפונקציה הנתונה. נקבע $\varepsilon>0$. מהנתון כי $\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$ נובע שיש $B>0$, כך ש- $\forall x\geq B: |f(x)-(ax+b)|<\varepsilon$.

בקטע הקומפקטי $[0,B]$, הפונקציה $f(x)$ רציפה ולכן רציפה במ"ש (ממשפט שמנוסח בשאלה 1).

בקרן $[B,\infty)$: נשים לב שהפונקציה $ax+b$ רציפה במידה שווה (בכל הישר), כי -

$$|(ax+b)-(ay+b)|=|a||x-y|$$

ולכן אם נקח $\delta=\frac{\varepsilon}{|a|}$ ההגדרה תתקיים (לפונקציה הלינארית $ax+b$). עבור δ זה נקבל:

$$\begin{aligned}&x,y\geq B, |x-y|<\delta\Rightarrow\\&|f(x)-f(y)|\leq|f(x)-(ax+b)|+|(ax+b)-(ay+b)|+|(ay+b)-f(y)|<\\&<\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon=3\varepsilon\end{aligned}$$

ובכך הראינו רציפות במידה שווה של $f(x)$ ב-$[B,\infty)$.

כעת, הוכחנו רציפות במידה שווה בשני הקטעים $[0,B],[B,\infty)$ בנפרד. נראה רציפות במ"ש באיחוד $[0,\infty)$: יהי $\varepsilon>0$. לפי מה שהוכחנו, יש δ_1,δ_2 שמתאימות לכל אחד מהקטעים הנ"ל ועונות להגדרה של רציפות במ"ש עם $\frac{\varepsilon}{2}$. נגדיר $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, ונטען שמתקיימת כעת ההגדרה של רציפות במ"ש עבור ε, כלומר אם $|x-y|<\delta$ אז $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$. אכן, אם $x,y\in[0,B]$ או $x,y\in[B,\infty)$ זה נובע מיד (כי $\delta<\delta_1,\delta_2$ ולכן אפילו $|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2}$). אך אם הנקודות בקטעים שונים, בה"כ $x<B, y>B$, אז נעזר בא"ש המשולש כדי לקבל:

$|f(x)-f(y)|\leq|f(x)-f(B)|+|f(B)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$, כנדרש.

ב. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x\sqrt{1+x}-x}=?$. נשים לב שהן המונה והן המכנה שואפים ל-0 כאשר $x\to 0$, ומדובר בפונקציות גזירות. לכן ניתן להשתמש בכלל לופיטל:

$$\frac{\ln\cos x}{x\sqrt{1+x}-x}\overset{(L)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{(\ln\cos x)'}{\left(x\sqrt{1+x}-x\right)'}=\lim_{n\to 0}\frac{\tan x}{\sqrt{1+x}-\frac{x}{2\sqrt{1+x}}-1}=$$

שוב, כאשר $x\to 0$ המונה והמכנה שואפים ל-0, ואלה פונקציות גזירות, לכן נוכל להשתמש שוב בלופיטל:

$$\overset{(L)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}-\frac{\sqrt{1+x}-x\cdot\frac{1}{2\sqrt{1+x}}}{2(1+x)}}=2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1+x}{\cos^2 x}}{\sqrt{1+x}-(\sqrt{1+x}-\frac{x}{2\sqrt{1+x}})}=2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1+x}{\cos^2 x}}{\frac{x}{2\sqrt{1+x}}}=$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{2(1+x)^{3/2}}{x\cos^2 x}=4\cdot\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{3/2}}{\cos^2 x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty$$

זאת, משום שהגורם הראשון הוא גבול סופי $=1$, והגורם השני הוא אינסופי.

<u>שאלה 6</u>

א. $f(x)=\begin{cases}\frac{x\ln x}{x-1}, & 0<x<1\\ \frac{1+x}{x}, & x\geq 1\end{cases}$.

<u>רציפות</u>: עבור $1\neq x>0$ הפונקציה בוודאי רציפה, כהרכבה של פונקציות רציפות.
נבדוק ב- x=1:

$$\lim_{x\to 1-}f(x)=\lim_{x\to 1-}\frac{x\ln x}{x-1}\overset{(L)}{=}\lim_{x\to 1-}\frac{\ln x+x\cdot\frac{1}{x}}{1}=\ln 1+1=1$$

$$\lim_{x\to 1+}f(x)=\lim_{x\to 1+}\frac{1+x}{x}=2$$

לכן אין רציפות בנקודה x=1. (שים לב שבחישוב הגבול הראשון השתמשנו בלופיטל, כי המונה והמכנה שואפים לאפס).

<u>גזירות</u>: ברור כעת שהפונקציה אינה גזירה ב-x=1 (כי אינה רציפה שם). עבור $1\neq x>0$, הפונקציה היא מנה של שתי פונקציות גזירות, ולכן גזירה. (טיעון זה תופס בכל חלק בנפרד - $0<x<1,\quad x>1$).

<u>מונוטוניות</u>: בקטע $(0,1)$ הפונקציה גזירה, ונגזרתה:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x\ln x}{x-1}\right)=\frac{(x-1)\cdot(\ln x+1)-1\cdot x\ln x}{(x-1)^2}=\frac{x-\ln x-1}{(x-1)^2}$$

כדי לבדוק מונוטוניות, די לבדוק אם סימן הנגזרת קבוע. המכנה חיובי, לכן נתבונן במונה. מפיתוח טיילור של $\ln(x)$ סביב 1: $\ln x=(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+o\left((x-1)^3\right)$, ולכן המונה הוא:

$$x-1-\ln x=x-1-(x-1)+\frac{(x-1)^2}{2}+o\left((x-1)^3\right)=\frac{(x-1)^2}{2}+o\left((x-1)^3\right)>0$$

מכאן שהפונקציה עולה בקטע $(0,1)$. כמו כן, חישבנו ומצאנו שבנק' x=1 יש קפיצה כלפי מעלה (גבול שמאלי הוא 1, בעוד הימני הוא 2). לכן, כדי להשלים את בדיקת המונוטוניות יש לבדוק את ההתנהגות בקטע $(1,\infty)$. נגזור שם:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1+x}{x}\right)=\frac{x\cdot 1-(1+x)\cdot 1}{x^2}=-\frac{1}{x^2}<0$$

ולכן בקטע זה הפונקציה יורדת (בצורה מונוטונית).
לסיכום, בכל תת-קטע - $(0,1)$ או $(1,\infty)$ - הפונקציה היא רציפה, גזירה ומונוטונית, אך על כל התחום היא אינה מקיימת אף אחת מתכונות אלה.

ב. נראה ש- $f(x)$ אינה חח"ע בקטע (a,b). אם $f(x)$ קבועה בקטע $[a,b]$, כלומר $f(x)=f(a)\ \forall x\in[a,b]$, אז בוודאי סיימנו. לכן נניח שקיימת נקודה $c\in(a,b)$ כך ש-

$f(c) \neq f(a)$. מרציפות הפונקציה וממשפט ערך הביניים, נובע שקיימות נקודות $x \in (a,c),\ y \in (c,b)$ כך ש- $f(x) = \frac{f(a)+f(c)}{2},\ f(y) = \frac{f(c)+f(b)}{2}$ (ממוצע בין ערכי הקצוות של אותו תת-קטע). מהנתון ש- $f(a) = f(b)$ נובע כי $f(x) = f(y)$, ולכן גם במקרה זה $f(x)$ אינה חח"ע.

<u>שאלה 7</u>

תזכורת – משפט לגרנז': אם f גזירה בקטע $[a,b]$, אזי $\exists c \in (a,b) : \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$.

א. מכיוון ש- f גזירה פעמיים היא בוודאי גם רציפה, לכן מתכונת ערך הביניים: $\exists b \in [1,2] : f(b) = 1 \Leftarrow f(1) = 0, f(2) = 2$. בנוסף נתון כי $f(0) = 1$. אז לפי משפט רול (שהוא מקרה פרטי של לגרנז' כאשר $f(b) = f(a)$, וכאן $a = 0$), קיימת נקודה $x_1 \in (0,b) \subset [0,2]$ כך ש- $f'(x_1) = 0$.

ב. בסימוני סעיף א', לפי משפט לגרנז' קיימת נקודה $x_2 \in (b,2)$ כך ש-

$f'(x_2) = \frac{f(2)-f(b)}{2-b} = \frac{2-1}{2-b} = \frac{1}{2-b} > 0$. ברור ש- $x_1 < b < x_2$.

שוב לפי משפט לגרנז', הפעם עבור f', קיימת נקודה $c \in (x_1, x_2)$ כך ש-

$f''(c) = \frac{f'(x_2)-f'(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{f'(x_2)}{x_2-x_1} > 0$ (כי המונה והמכנה שניהם חיוביים).

5.03.2004

אוניברסיטת תל-אביב
הפקולטה למדעים מדוייקים

בחינה בחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 1
לתלמידי מתמטיקה שנה א.
המורה: מ. אפשטיין

משך הבחינה: 3 שעות . אין להשתמש בחומר עזר כלשהו.
ענה על 4 מבין השאלות הבאות - לפחות אחת , אבל לא יותר משתיים מבין שאלות 1 , 2 ו- 3. כל שאלה- 25 נקודות.

שאלה 1

א. תהי f פונקציה רציפה על קבוצה $A \subset \mathbf{R}$ קומפקטית. הוכח כי $f(A)$ קומפקטית (20 נק') .

ב. בהסתמך על (א) , הוכח כי פונקציה רציפה על קבוצה קרומפקטית, היא חסומה ומשיגה את חסמיה (5 נק').

שאלה 2

הוכח כי לכל סדרת ממשית יש ב- $\bar{\mathbf{R}}$, נקודת גבול הגדולה ביותר ונקודת גבול הקטנה ביותר.

שאלה 3

תהי $f: I \to R$ (I רווח) פונקציה גזירה n פעמים בנקודה $x_0 \in I$, ותהי $r_n(x)$ השארית מסדר n שבנוסחת Taylor של f בנקודה x_0. הוכח כי

$$\lim_{x \to x_0} \frac{r_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0 .$$

שאלה 4

א. הסדרה (a_n) מוגדרת ע"י: $a_1 = \frac{1}{2}$ ולכל $n \in \mathbf{N}^*$, $a_{n+1} = a_n - a_n^3$. הוכח כי קיים $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$ וחשב אותו.

ב. כמה פיתרונות קיימים למשוואה $\alpha x = \ln x$.

שאלה 5

א. האם הפונקציה $f(x)=\dfrac{x}{1+e^x}$ רציפה במדה שווה על $\mathbf{R}$? נמק.

ב. חשב את $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$.

שאלה 6

א. הראה שלכל $x>0$ קיים $1+2\ln x\le x^2$.

ב. חשב את $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}\sin x-\frac{1}{2}(x+tgx)}{x^3}$

∞

שאלה 7

תהי $f:(a,b)\to\mathbf{R}$ פונקציה גזירה, ותהי $x_0\in(a,b)$. הוכח כי קיימת סדרה (x_n) ב- (a,b),

כך ש $x_n\to x_0$, ו- $f'(x_n)\to f'(x_0)$.

בהצלחה!

<u>מבחן בחדו"א 1</u> תאריך: 5.03.2004

מורה: מ. אפשטיין

<u>שאלה 1</u>

נתון: $A\subset\mathbb{R}$ קומפקטית, כלומר סגורה וחסומה – ולכן בהכרח קטע סגור $A=[a,b]$;

$f:A\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה.

א. צ"ל: $f(A)$ סגורה וחסומה.

סגירות: תהי $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}\subset f(A)$ סדרה, המתכנסת ב- $\mathbb{R}$ לאיבר y. צריך להראות ש- $y\in f(A)$.

ואכן, $\{x_n\}\subset A$ ו- A חסומה, לכן לפי בולצנו-ויירשטרס נובע כי לכל סדרה ב-A יש תת-סדרה מתכנסת. תהי $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}\to x\in\mathbb{R}$ תת-סדרה כזו; כיוון ש-A סגורה, $x\in A$. כיוון ש- f רציפה, $\{f(x_{n_k})\}\to f(x)$. אבל מצד שני $\{f(x_{n_k})\}\to y$, כי זו תת-סדרה של $\{f(x_n)\}$. מיחידות הגבול מקבלים כי $y=f(x)$, כלומר $y\in f(A)$ כנדרש.

חסימות: נניח בשלילה ש- f לא חסומה. אז קיימת סדרה $\{x_n\}\subset A$ כך ש- $f(x_n)\xrightarrow{n\to\infty}\infty$.

(בניית הסדרה: לכל n, נבחר $x_n\in A$ כך ש- $|f(x_n)|>n$. מהנחת השלילה, זה אפשרי).

לפי משפט בולצנו-ויירשטס, כיוון ש- A חסומה, קיימת לסדרה זו תת-סדרה מתכנסת, וכיוון ש-A סגורה הגבול הוא ב-A: $\{x_{n_k}\}\xrightarrow{k\to\infty}c\in A$. מרציפות f, $f(c)=\lim_{k\to\infty}f(x_{n_k})$, אך באותו זמן מתקיים $\lim_{k\to\infty}f(x_{n_k})=\infty$, וזו סתירה!

ב. הוכחנו כבר ב-א', כי הפונקציה f חסומה (כלומר קבוצת הערכים שהיא מקבלת - $f(A)$ היא חסומה). נותר להראות שהיא משיגה את חסמיה.

נסמן: $M=\sup_{x\in A}f(x),\ m=\inf_{x\in A}f(x)$. מהגדרת inf, sup יש סדרות כך ש- $\{f(x_n)\}\to M,\ \{f(y_n)\}\to m$, כאשר $\{x_n\},\{y_n\}\subset A$. כמו קודם, מבולצנו ויירשטרס נובע כי יש תת-סדרות מתכנסות: $\{x_{n_k}\}\to c_1\in A,\ \{y_{n_k}\}\to c_2\in A$. ואז, מרציפות הפונקציה, נקבל:

$$f(c_1)=\lim_{k\to\infty}f(x_{n_k})=M$$
$$f(c_2)=\lim_{k\to\infty}f(y_{n_k})=m$$

- כלומר החסמים מתקבלים (כמינימום ומקסימום).

<u>שאלה 2</u>

תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת מספרים ממשיים. נסמן ב- $PL(a_n)$ את קבוצת הגבולות החלקיים של $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

נראה כי קיים $\max PL(a_n)\in\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$, כלומר קיימת נקודת גבול גדולה ביותר.

אם $\{a_n\}$ אינה חסומה, אז $\infty\in PL(a_n)$, וזו נקודת הגבול הגדולה ביותר. נניח לכן כי $\{a_n\}$ חסומה מלמעלה. נראה שקיים חסם מלמעלה קטן ביותר:

תהי $B=\{c\in\mathbb{R}\mid c\ge a_n\ \forall n\}$ קבוצת החסמים העליונים של הסדרה. מתקיים $a_n\le c\ \forall n\in\mathbb{N},\forall c\in B$. ממשפט השלמות של $\mathbb{R}$, קיים $s\in\mathbb{R}$ כך ש- $a_n\le s\le c\ \forall n\in\mathbb{N},\forall c\in B$. בפרט, נובע כי $s\in B,\quad s\le c\ \ \forall c\in B$ וזה בדיוק אומר ש- $s=\min B$, או במילים אחרות $s=\sup a_n$ - חסם מלעיל קטן ביותר.

עכשיו, נראה כי $s\in PL(a_n)$: נניח בשלילה שאין תת-סדרה של $\{a_n\}$ ששואפת ל-s. זאת אומרת שקיים $\varepsilon>0$ כך ש-$|a_n-s|>\varepsilon,\ \forall n$. אך זה גורר ש- $a_n<s-\varepsilon,\forall n$, ולכן $s-\varepsilon\in B,\ s-\varepsilon<s$, כלומר מצאנו חסם עליון לסדרה הקטן מ-s, סתירה לכך שזהו החסם העליון הקטן ביותר.

לכן, לכל $\varepsilon > 0$ קיים n, כך ש- $|a_n - s| < \varepsilon$, וזה אומר ש-s היא נקודת גבול של הסדרה:
$s \in PL(a_n)$. מצד שני, $a_n \le s \, \forall n \Rightarrow PL(a_n) \in (-\infty, s]$, לכן זו נקודת הגבול הגדולה ביותר.
באופן סימטרי מוכיחים קיום של נקודת גבול קטנה ביותר.

<u>שאלה 3</u>

נפתח את טור טיילור של $f(x)$ בנקודה x_0 עד הסדר ה- n:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + r_n(x) =$$
$$= P_n(x) + r_n(x)$$

אז: $r_n(x) = f(x) - P_n(x) = f(x) - \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j$.

נראה שלכל $0 \le j \le n$, מתקיים: $r_n^{(j)}(x_0) = 0$. ואכן, אם נגזור את הפולינום $P_n(x)$ j פעמים, נקבל:

$$P_n^{(j)}(x_0) = \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} j! + (x-x_0)(\ldots\ldots)\Big|_{x=x_0} = f^{(j)}(x_0)$$
$$\Rightarrow r_n^{(j)}(x_0) = f^{(j)}(x_0) - P_n^{(j)}(x_0) = 0, \qquad 0 \le j \le n$$

עכשיו, נוכיח באינדוקציה על n את הטענה הבאה:

<u>טענה:</u> אם $R(x)$ היא פונקציה גזירה n פעמים ב- x_0, כך ש- $R(x_0) = R'(x_0) = \ldots = R^{(n)}(x) = 0$,
אז $\lim_{x \to x_0} \frac{R(x)}{(x-x_0)^n} = 0$. (עבור $R(x) = r_n(x)$ נקבל את מה שצריך להוכיח).

<u>הוכחה:</u> $n=1$: $\lim_{x \to x_0} \frac{R(x)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{R(x) - R(x_0)}{x-x_0} = R'(x) = 0$, כנדרש.

$n-1 \leftarrow n$: לפי משפט לגרנז' $R(x) = R(x) - R(x_0) = R'(c)(x-x_0)$ עבור c כלשהו בין x לבין x_0
. כעת, $R'(x)$ מקיימת את תנאי הטענה עבור $n-1$. מכל זה מקבלים:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x \to x_0} \frac{R(x) - R(x_0)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x \to x_0} \frac{R'(c)(x-x_0)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x \to x_0} \frac{R'(c)}{(x-x_0)^{n-1}}$$

$$|x-x_0| < |c-x_0| \Rightarrow 0 \le \lim_{x \to x_0} \left| \frac{R'(c)}{(x-x_0)^{n-1}} \right| \le \lim_{c \to x_0} \left| \frac{R'(c)}{(c-x_0)^{n-1}} \right| = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{R'(x)}{(x-x_0)^{n-1}} = 0$$

שים לב שבשורה השניה השתמשנו בהנחת האינדוקציה.
כמו שראינו, $R(x) = r_n(x)$ מקיימת את תנאי הטענה, לכן גם את מסקנתה, וזה מה שצריך להוכיח.

<u>שאלה 4</u>

א. $a_1 = \frac{1}{2}$; $n \ge 1$, $a_{n+1} = a_n - a_n^3$. נשים לב ש- $a_{n+1} = a_n\left(1 - a_n^2\right) \Leftarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - a_n^2$. לכן,

$$\exists \lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \Leftrightarrow \exists \lim_{n \to \infty}(1 - a_n^2) \Leftrightarrow \exists \lim_{n \to \infty} a_n^2 \Leftarrow \exists \lim_{n \to \infty} a_n$$

נוכיח ש- $\{a_n\}$ סדרה מונוטונית יורדת וחסומה מלמטה, לכן בעלת גבול. אכן, נוכיח באינדוקציה כי:
$1 > a_n > a_{n+1} > 0$, וזה יראה את שני הדברים גם יחד.

$n=1$: $1>a_1=\frac{1}{2}>0$, וכן $a_1=\frac{1}{2}>a_2=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}>0$.

כעת נניח ש- $1>a_{n-1}>a_n>0$. אז: $1>a_n>a_n-a_n^3>0$, וזה בדיוק מה שדרוש.

הוכחנו את קיום הגבול $\lim_{n\to\infty} a_n=a$, אשר גורר את קיום הגבול $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ (כפי שהוסבר בהתחלה). כדי לחשב אותו נקח גבול על שני אגפי המשוואה: $a_{n+1}=a_n-a_n^3 \Leftarrow a=a-a^3 \Leftarrow a=0$. כעת:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}(1-a_n{}^2)=1-(\lim_{n\to\infty}a_n)^2=1-0=1$$

ב. כדי לחקור את המשוואה $\alpha x=\ln x$, נחלק ב-x (מותר, כי x=0 אף פעם אינו פתרון), ונתבונן ב- $f(x)=\frac{\ln x}{x}=\alpha$. נבצע חקירת פונקציה: תחום ההגדרה של $f(x)$: $(0,\infty)$. תחומי עליה וירידה:

$$f'(x)=\frac{x\cdot\frac{1}{x}-\ln x\cdot 1}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

$$x<e\Rightarrow \ln x<1\Rightarrow f'(x)>0\Rightarrow f\nearrow$$

$$x=e\Rightarrow f'(e)=0$$

$$x>e\Rightarrow \ln x<1\Rightarrow f'(x)<0\Rightarrow f\searrow$$

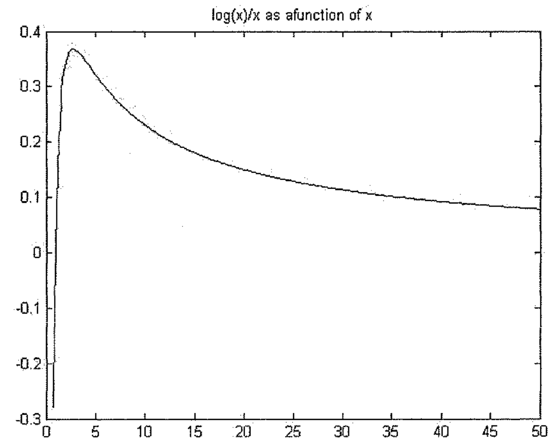
לכן ברור ש- $x=e$ נקודת מקסימום, שם $f(e)=\frac{1}{e}$.

בנוסף נחשב גבולות בקצוות:

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}\overset{(L)}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{1}=0\ (L'hopital's\ rule)$$

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{x}=(\lim_{x\to 0}\ln x)(\lim_{x\to 0}\frac{1}{x})=-\infty\cdot\infty=-\infty$$

כעת, מרציפות הפונקציה ומצורת הגרף שלה (שקיבלנו לפי החקירה), נקבל את המסקנות הבאות לגבי מספר הפתרונות של $f(x)=\alpha$:



$\alpha>\frac{1}{e} \Leftarrow$ אין פתרונות.

$0<\alpha<\frac{1}{e} \Leftarrow$ יש שני פתרונות.

$\alpha=\frac{1}{e}$ או $\alpha\le 0 \Leftarrow$ יש פתרון אחד.

<u>שאלה 5</u>

א. $f(x)=\frac{x}{1+e^x}$ היא פונקציה רציפה על $\mathbb{R}$, כמנה של פונקציות רציפות בהן המכנה לא מתאפס (ולא שואף לאפס). נראה שהיא גם רציפה במידה שווה. כדי להוכיח זאת, נראה שהנגזרת שלה חסומה.

$$f'(x)=\frac{(1+e^x)-xe^x}{(1+e^x)^2}=\frac{1}{1+e^x}-\frac{xe^x}{(1+e^x)^2}$$

$$\lim_{x\to\infty} f'(x)=0-\lim_{x\to\infty}\frac{xe^x}{(1+e^x)^2}\overset{(L)}{=}-\lim_{x\to\infty}\frac{e^x+xe^x}{2(1+e^x)e^x}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{1+x}{1+e^x}\overset{(L)}{=}-\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+e^x}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f'(x)=\frac{1}{1+0}-\lim_{x\to-\infty}\frac{xe^x}{(1+e^x)^2}=1-\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{(1+e^x)^2}\cdot\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}}=1-1\cdot\lim_{t\to\infty}\frac{-t}{e^t}=1-0=1$$

קיבלנו כי $f'(x)$ היא פונקציה רציפה בכל $\mathbb{R}$, ובעלת גבולות סופיים ב- $\pm\infty$. מכאן מסיקים כי היא בעלת סופרימום (כלומר חסומה בישר הממשי), ונסמן חסם זה ע"י M: $|f'(x)|\le M$.

כעת, לפי משפט לגרנז' עבור $f(x)$, לכל $a<b$ קיים $c\in(a,b)$ כך ש-

$|f(b)-f(a)|\le|f'(c)|\cdot(b-a)\le M(b-a)$. (זהו בדיוק התנאי של פונקציית ליפשיץ.)

מכאן נוכיח רציפות במ"ש: נלך לפי ההגדרה. יהי $\varepsilon>0$. נבחר $\delta=\frac{1}{M}\varepsilon$. אז לכל $x,y\in\mathbb{R}$ המקיימים $|x-y|<\delta$, מתקיים: $|f(x)-f(y)|\le M|x-y|<M\cdot\frac{1}{M}\varepsilon=\varepsilon$, כנדרש.

ב. נביא את הביטוי לצורה נוחה יותר בעזרת מניפולציות אלגבריות:

$$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}=\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}=$$

$$=\frac{\cancel{x}+\sqrt{x+\sqrt{x}}-\cancel{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}\cdot\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}}=\frac{\sqrt{\frac{x+\sqrt{x}}{x}}}{\sqrt{\frac{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x}}+1}=\frac{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{x+\sqrt{x}}{x^2}}}+1}=$$

$$=\frac{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x\sqrt{x}}}}+1}\xrightarrow{x\to\infty}\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{1}+1}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

<u>שאלה 6</u>

א. צ"ל: $1+2\ln x\le x^2,\ \forall x>0$.

נגדיר $f(x)=x^2-2\ln x$. נמצא את המינימום של הפונקציה. נקודות קיצון:

$$f'(x)=2x-\frac{2}{x}=2(x-\frac{1}{x})=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{x}\Leftrightarrow x^2=1$$

אך תחום ההגדרה הוא x>0, לכן נקודת הקיצון היחידה היא x=1. שם $f(1)=1-0=1$. נבדוק שזו אכן נקודת מינימום: מהתבוננות בנגזרת רואים ש-

$$0<x<1\Leftarrow x^2<1\Leftarrow x-\frac{1}{x}<0\Leftarrow f'(x)<0$$

$$x>1\Leftarrow x^2>1\Leftarrow x-\frac{1}{x}>0\Leftarrow f'(x)>0$$

לכן הפונקציה יורדת בקטע $(0,1)$, ועולה בקרן $(1,\infty)$. מכאן שבנקודה x=1 יש מינימום גלובלי,
כלומר: $x^2-2\ln x=f(x)>f(1)=1,\ \ \forall x>0$, כנדרש.

ב. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}\sin x-\frac{1}{2}(x+\tan x)}{x^3}=?$

נסמן את הגבול (בהנחה שקיים) ב-L. נשים לב שהן המכנה והן המונה שואפים ל-0, ומדובר בפונקציות גזירות, לכן נוכל להשתמש בכלל לופיטל:

$$L\overset{(L)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2xe^{x^2}\sin x+e^{x^2}\cos x-\frac{1}{2}(1+\frac{1}{\cos^2 x})}{3x^2}=\frac{2}{3}\underbrace{\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot e^{x^2}\right)}_{1}+\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}\cos x-\frac{1}{2}(1+\frac{1}{\cos^2 x})}{3x^2}$$

עבור הגבול האחרון, שוב המונה והמכנה שואפים לאפס (כש-x שואף ל-0), לכן נשתמש שוב בלופיטל:

$$L-\frac{2}{3}\overset{(L)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2xe^{x^2}\cos x-e^{x^2}\sin x-\frac{1}{2}\frac{(-2)\cdot(-\sin x)}{\cos^3 x}}{6x}=$$

$$=\frac{1}{3}\underbrace{\lim_{x\to 0}\left(e^{x^2}\cos x\right)}_{1}-\frac{1}{6}\underbrace{\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}e^{x^2}\right)}_{1}-\frac{1}{6}\underbrace{\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos^3 x}\right)}_{1}=\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{6}=0$$

לכן: $L=\dfrac{2}{3}$.

שאלה 7

$f:(a,b)\to\mathbb{R}$ גזירה, ותהי $x_0\in(a,b)$. נתבונן בקטע סגור חלקי כך ש- $x_0\in[a_1,b_1]\subset(a,b)$.

נשתמש במשפט לגרנז' בקטע $[a_1,b_1]$. נקבל שלכל $n\in\mathbb{N}$ קיים $c_n\in(x_0,x_0+\frac{1}{n})$ כך ש-

$$\frac{f(x_0+\frac{1}{n})-f(x_0)}{\frac{1}{n}}=f'(c_n).$$

כעת $f'(x_0)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(x_0+\frac{1}{n})-f(x_0)}{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}f'(c_n)$, וכמו כן ברור ש- $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=x_0$ (לפי כלל הסנדוויץ', כי $x_0<c_n<x_0+\frac{1}{n}$). אז $\{c_n\}=\{x_n\}$ זו הסדרה המבוקשת.

25.01.2005

אינפי א' - סמס' א' - תשס"ה

אוניברסיטת תל- אביב

הפקולטה למדעים מדויקים

בחינה בחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 1
לתלמידי מתמטיקה שנה א.
המורה: מ. אפשטיין

משך הבחינה: 3.5 שעות . אין להשתמש בחומר עזר כלשהו.

ענה על 4 מבין השאלות הבאות - לפחות אחת , אבל לא יותר משתיים מבין שאלות 1 , 2 ו- 3. כל שאלה- 25 נקודות.

שאלה1

א. תהי $A \subset R$ קבוצה חסומה ו $f : A \rightarrow R$ פונקציה רציפה במידה שווה על A.
הוכח ש- f חסומה על A.

ב. יהי I רווח חסום. תהי $f : I \rightarrow R$, פונקציה גזירה על I שאינה חסומה. הוכח כי גם f' אינה חסומה על I.

שאלה 2

יהי I רווח ו $f : I \rightarrow R$ פונקציה רציפה. הוכח שיש לה תכונת *Darboux* על I.

שאלה 3

א. תהי $f : A \rightarrow R$ ו x_0 נקודת הצטברות של A סופית או לא. נסח את קריטריון של *Boltzano-Cauchy* לקיום $\lim_{x \to x_0} f(x)$ סופי, ואת קריטריון של *Stolz* לקיום $\lim_{x \to x_0} f(x)$, סופי או לא.

ב. הוכח לבחירתך אחד מהמשפטים שניסחת ב -א.

שאלה4

א. תהי $g : (0,\infty) \rightarrow R$, כאשר $g(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$. בדוק רציפות במ"ש של הפונקציה g על $(0,\infty)$.

ב. תהי הסדרה (a_n) כאשר $a_1 = 0$ ולכל $n \geq 1$, $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}\left(l - a_n^2\right)$, כאשר $0 < l < 1$. הוכח ש-(a_n) מתכנסת ומצא את גבולה.

שאלה 5

א. הוכח כי אם $f(x)$ רציפה על $[0,\infty)$ וכן קיים $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L < \infty$, אזי $f(x)$ רציפה במ"ש על $[0,\infty)$.

ב. נתונה סדרה (a_n) כך ש $\lim(a_n + a_{n+1}) = 0$. הוכח כי $\limsup a_n \geq 0$.

שאלה 6

א. הוכח כי לכל $x > 0$ מתקיים $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} < \ln(1+x) < \frac{x}{\sqrt{1+x}}$.

ב. תהי $f(x)$ פונקציה בעלת נגזרת שלישית בקטע $[-1,1]$, המקיימת: $f(0) = f(-1) = 0$ וכן $f(1) = 1$ ו-$f'(0) = 0$. הוכח כי קיימת נקודה $c \in [-1,1]$ כך ש $f^{(3)}(c) \geq 3$.

שאלה 7

א. בדוק גזירות ונקודות אקסטרמום של הפונקציה $f : R \to R$, כאשר $f(x) = \frac{|x|}{e^{|x-1|}}$. ?

ב. חשב את $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x}\right)^x$

בהצלחה!

מבחן בחדו"א 1   תאריך: 25.01.2005
מורה: מ. אפשטיין

שאלה 1

א. נניח בשלילה ש- f איננה חסומה על A, כלומר קיימת סדרה $\{x_n\} \subset A$ כך ש-
$f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} \infty$ (*) (או $-\infty$, מקרה שמטופל באופן דומה). לפי משפט בולצנו-ויירשטרס לסדרות (המכונה גם הלמה של $Cesaro$), הסדרה $\{x_n\}$ חסומה ולכן בעלת תת-סדרה $\{x_{n_k}\}$ שהיא סדרת קושי (סדרה מתכנסת ב- $\mathbb{R}$).
נבחר $\varepsilon > 0$. מרציפות במ"ש של f על A, קיים $\delta > 0$ כך ש-
$x, y \in A, |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon$. (1)
עבור δ הזה קיים $N \in \mathbb{N}$ כך ש- $k,m > N \Rightarrow |x_{n_k} - x_{n_m}| < \delta$ (2) - זה מתנאי קושי.
מ-(1)+(2) נקבל: $k,m > N \Rightarrow |f(x_{n_k}) - f(x_{n_m})| < \varepsilon$, כלומר $\{f(x_{n_k})\}$ סדרת קושי, ובפרט חסומה. אך מ-(*) נקבל כי $f(x_{n_k}) \xrightarrow{k\to\infty} \infty$, וזו סתירה.

ב. נניח בשלילה כי f' חסומה על I: $\forall x \in I: |f'(x)| \le M$. נסביר מדוע f רציפה במ"ש על I.
לפי משפט לגרנז' עבור $f(x)$, לכל $a<b$ קיים $c \in (a,b)$ כך ש-
$|f(b)-f(a)| \le |f'(c)| \cdot (b-a) \le M(b-a)$.
יהי $\varepsilon > 0$. נבחר $\delta = \frac{1}{M}\varepsilon$. אז לכל $x, y \in I$ המקיימים $|x-y| < \delta$, מתקיים:
$|f(x)-f(y)| \le M|x-y| < M \cdot \frac{1}{M}\varepsilon = \varepsilon$, כנדרש.
כעת, לפי סעיף א': I חסום, f רציפה במ"ש על I $\Leftarrow$ f חסומה על I, וזאת סתירה לנתון.

שאלה 2

יהיו $a,b \in I$, $a<b$, ו- μ מספר בין $f(a)$ ל- $f(b)$. יש להראות כי קיים $c \in (a,b)$ כך ש- $f(c) = \mu$.
נוכיח את הדרוש בשיטת החלוקה על הקטע $[a,b] \subset I$. תחילה נגדיר: $g(x) = f(x) - \mu$. צריך להראות כי $\exists c \in [a,b]: g(c) = 0$. כעת, כיוון ש- μ בין $f(a)$ לבין $f(b)$, נובע ש- g שלילית באחד מקצות הקטע (a או b), וחיובית בשני. (בקיצור: $g(a)\cdot g(b) < 0$). נניח בלי הגבלת הכלליות ש- $g(a) < 0,\ g(b) > 0$.
בשלב הראשון נגדיר $I_0 = [a,b];\ d_0 = \frac{a+b}{2}$. יש שלושה מקרים:
1. $g(d_0) = 0$ - סיימנו את ההוכחה.
2. $g(d_0) < 0$ - נגדיר: $I_1 = [a_1,b_1],\ a_1 = d_0,\ b_1 = b$.
3. $g(d_0) > 0$ - נגדיר: $I_1 = [a_1,b_1],\ a_1 = a_0,\ b_1 = d_0$.

נמשיך את התהליך ע"י הגדרת $d_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$, וחלוקה לשלושה מקרים באופן דומה...
כך נגיע לסדרה אינסופית (אם לא סיימנו את ההוכחה בשלב סופי) של קטעים מוכלים:
$I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \ldots$; $I_j = [a_j, b_j]$, עם התכונות:

1. $g(a_j)\cdot g(b_j)<0;$

2. $|I_j|=\frac{1}{2}|I_{j-1}|=\ldots=2^{-j}|I_0|$

לפי הלמה של קנטור על קטעים מוכלים נובע כי: $\bigcap_{j=1}^{\infty} I_j \neq \varnothing$. מתכונה 2 (אורך הקטעים שואף לאפס), נובע שיש נקודה יחידה בחיתוך: $\bigcap_{j=1}^{\infty} I_j=\{c\}$. נבדוק ש- $g(c)=0$:

$$a_n \to c \Rightarrow \lim_{n\to\infty} g(a_n)=g(c)$$
$$b_n \to c \Rightarrow \lim_{n\to\infty} g(b_n)=g(c)$$

(שים לב שזה נובע מרציפות g, אשר נובעת מרציפות f).

עכשיו: $g(c)^2=\lim_{n\to\infty} g(a_n)\cdot\lim_{n\to\infty} g(b_n)=\lim_{n\to\infty}(g(a_n)\cdot g(b_n))\le 0$ - השתמשנו בכך שגבול של מכפלה הוא מכפלת הגבולות, וכן בתכונה 1 למעלה.
קיבלנו $g(c)=0 \Leftarrow g(c)^2\le 0$, כנדרש.

<u>שאלה 3</u>

<u>קריטריון בולצנו-קושי:</u> $\lim_{x\to x_0} f(x)$ קיים וסופי $\Leftrightarrow$ לכל $\varepsilon>0$ קיימת סביבה מנוקבת V^* של x_0, כך שלכל $x,y\in V^*\cap A$ מתקיים $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

<u>הוכחה:</u> ($\Leftarrow$) נסמן $l=\lim_{x\to x_0} f(x)$ (סופי, ע"פ ההנחה), ויהי $\varepsilon>0$. מהגדרת הגבול קימת סביבה מנוקבת V^* של x_0 כך שאם $u\in A\cap V^*$ אז $|f(u)-l|<\frac{\varepsilon}{2}$. לכן, אם $x,y\in V^*\cap A$ אז: $|f(x)-f(y)|\le|f(x)-l|+|l-f(y)|<\varepsilon$.

($\Rightarrow$) נניח כי התנאי מתקיים. יהי $\varepsilon>0$. אז קיימת סביבה מנוקבת V^* של x_0, כך שלכל $x,y\in V^*\cap A$ מתקיים $|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2}$. (*)

היות ו- x_0 היא נקודת הצטברות של A, קיימת סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset A-\{x_0\}$ כך ש- $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0$.
לכן קיים N_1 טבעי כך ש- $x_n\in V^* \Leftarrow n\ge N_1$. מכאן נובע שלכל $m,n>N_1$ מתקיים: $|f(x_n)-f(x_m)|<\frac{\varepsilon}{2}$. מכאן ש- $\{f(x_n)\}$ היא סדרת קושי ולכן היא מתכנסת לגבול $l\in\mathbb{R}$ (זהו גבול סופי, כי סדרת קושי היא גם חסומה). אזי קיים N_2 כך ש- $|f(x_n)-l|<\frac{\varepsilon}{2} \Leftarrow n\ge N_2$. (**)

נסמן $N=\max(N_1,N_2)$. אזי $x_N\in A\cap V^*$, ולכל $x\in A\cap V^*$ מתקיים על סמך (*)+(**):
$|f(x)-l|\le|f(x)-f(x_N)|+|f(x_N)-l|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$. זה בדיוק מוכיח כי $l=\lim_{x\to x_0} f(x)$.

<u>קריטריון Stolz:</u> $\lim_{x\to x_0} f(x)$ קיים וסופי $\Leftrightarrow$ לכל סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset A-\{x_0\}$ כך ש- $x_n\to x_0$, לסדרה $\{f(x_n)\}$ קיים גבול.

<u>הוכחה:</u> ($\Leftarrow$) נסמן $l=\lim_{x\to x_0} f(x)$, ותהי $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset A-\{x_0\}$ כך ש- $x_n\to x_0$.

תהי W סביבה של l. לפי ההנחה קיימת סביבה מנוקבת V^* של x_0, כך שאם $x\in A\cap V^*$ אז $f(x)\in W$.

היות ו- $x_n \to x_0$ ולכל $n\in\mathbb{N}$, $x_n \in A-\{x_0\}$, נובע כי קיים N כך ש- $x_n \in V^*\cap A,\ \forall n>N$ ואז $f(x_n)\in W$. זה מראה כי $f(x_n)\xrightarrow{n\to\infty} l$, הגבול קיים כנדרש.

($\Longrightarrow$) נניח כי התנאי מתקיים, ונוכיח כי ל- f יש גבול בנק' x_0. ראשית נוכיח כי הגבול של הסדרה $\{f(x_n)\}$ הוא בלתי תלוי בבחירת הסדרה $\{x_n\}$ ששואפת ל- x_0. יהיו $\{x_n'\},\{x_n''\}$ שתי סדרות ב- $A-\{x_0\}$ השואפות ל- x_0, ונניח בשלילה כי $f(x_n')\to l',\ f(x_n'')\to l''$ כאשר $l'\neq l''$. נגדיר סדרה $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}\subset A-\{x_0\}$ ע"י: $y_{2n-1}=x_n'\ ,\ y_{2n}=x_n''$. אז $y_n\to x_0$, אבל בניגוד לנתון ל- $\{f(y_n)\}$ אין גבול (כי בעלת שתי תתי סדרות $\{f(y_{2n})\},\{f(y_{2n-1})\}$ השואפות לגבולים שונים).

הסתירה שהתקבלה מוכיחה כי $l'=l''$, ובמילים אחרות לכל סדרה $\{x_n\}$ ששואפת ל- x_0, קיים אותו הגבול ל- $\{f(x_n)\}$. נסמן גבול זה ב- l. נוכיח כי $l=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$: נניח אחרת. אז קיימת סביבה W של l כך שלכל סביבה מנוקבת V^* של x_0 קיים $x\in A\cap V^*$ כך ש- $f(x)\notin W$. לכל $n\in\mathbb{N}$, תהי V_n^* הסביבה המנוקבת הבאה של x_0:

$$V_n^*=\begin{cases}B(x_0,\frac{1}{n})-\{x_0\}, x_0\in\mathbb{R}\\(n,\infty), \quad x_0=\infty\\(-\infty,-n), \quad x_0=-\infty\end{cases}.$$

אז לפי האמור לעיל, לכל $n\in\mathbb{N}$ קיימת נקודה $x_n\in A\cap V_n^*$, כך ש- $f(x_n)\notin W$. בנינו בכך סדרה שאיבריה מ- $A-\{x_0\}$, כך ש- $x_n\to x_0$, אבל $\{f(x_n)\}$ אינה שואפת ל- lף וזאת בסתירה למה שהוכחנו. לכן מתקיים $l=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$.

<u>שאלה 4</u>

א. $g(x)=x^2\sin\frac{1}{x},\ \ x\in(0,\infty)$.

קודם כל, נשים לב שניתן להרחיב את הפונקציה ברציפות גם עבור $x=0$, כי - $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin x=0$. לכן נגדיר $g(0):=0$.

נבדוק האם הנגזרת חסומה:

$$g'(x)=2x\sin\frac{1}{x}+x^2\left(\frac{-1}{x^2}\cos\frac{1}{x}\right)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$$

נשים לב ש- $1=\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}$, ולכן:

$1=2-1=\lim\limits_{x\to\infty}\cos\frac{1}{x}-\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}\lim\limits_{x\to\infty}g'(x)=2$. מכאן נסיק כי יש M כך ש-

$1<g'(x)<2 \Leftarrow x\geq M$. כלומר, g' חסומה על $[M,\infty)$. מכאן נובע כי g רציפה במ"ש ב- $[M,\infty)$ (ההוכחה כמו בשאלה 1ב' של מבחן זה, כאשר $I=[M,\infty)$).

כעת, בקטע $[0,M]$ זו פונקציה רציפה על קטע קומפקטי, ולכן רציפה במ"ש.

מכאן נובע כי g רציפה במ"ש בכל התחום $[0,\infty)=[0,M]\cup[M,\infty)$.

הסבר: יהי $\varepsilon>0$. לפי מה שהוכחנו, יש δ_1,δ_2 שמתאימות לכל אחד מהקטעים הנ"ל ועונות להגדרה של רציפות במ"ש עם $\frac{\varepsilon}{2}$. נגדיר $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, ונטען שמתקיימת כעת ההגדרה של רציפות במ"ש עבור ε, כלומר אם $|x-y|<\delta$ אז $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$. אכן, אם $x,y\in(0,M]$ או

$x, y \in [M,\infty)$ זה נובע מיד (כי $\delta < \delta_1, \delta_2$ ולכן אפילו $|f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$). אך אם הנקודות בקטעים שונים, בה"כ $x < M, y > M$, אז נעזר בא"ש המשולש כדי לקבל:

$|f(x)-f(y)| \le |f(x)-f(M)| + |f(M)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, כנדרש.

ב. $a_1 = 0$, $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}\left(1-a_n^2\right)$ (*)

נסמן: $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2}$, ונשים לב ש- $a_{n+1} = f(a_n)$, ומכאן - $f^n(a_1) = a_{n+1}$.

ע"י פתירת המשוואה הריבועית $f(x) = 0$ מוצאים כי שורשיה הם: $x_1 = 1-\sqrt{2},\ x_2 = 1+\sqrt{2}$.

מדובר בפרבולה עם מקדם ראשי שלילי, לכן בעלת נק' מקסימום בממוצע בין השורשים (מסימטריה), כלומר בנק' $x = 1$. שם- $f_{\max} = f(1) = 1$. בסה"כ ניתן להסיק כי: $0 \le f(x) \le 1 \Leftarrow x_1 \le x \le x_2$.

אך אז בפרט $x_1 < f(x) < x_2$, ולכן גם $0 \le f(f(x)) \le 1$. באופן אינדוקטיבי נסיק שאם $x_1 < a_1 < x_2$ (וזה אכן מתקיים), אז $0 \le f^n(a_1) = a_{n+1} \le 1$.

מכאן, $1 - a_n^2 \ge 0$, ולכן $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}\left(1-a_n^2\right) \ge a_n$. הוכחנו בזאת כי $\{a_n\}$ סדרה מונוטונית עולה וחסומה מלמעלה, על-כן היא מתכנסת.

נסמן $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. נקח גבול $n \to \infty$ במשוואה (*) ונשתמש בתכונות הגבול:

$a = a + \frac{1}{2}(1-a^2) \Rightarrow 1 - a^2 = 0 \Rightarrow a = \pm 1$.

מכיוון ש- $\forall n,\ a_n \ge 0$ נובע כי $a \ge 0$, ולכן: $a = 1$.

שאלה 5

א. יהי $\varepsilon > 0$. מהנתון כי $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L < \infty$ נובע שקיים $M > 0$ כך שאם $x \ge M$ אז $|f(x)-L| < \frac{\varepsilon}{4}$. לכן לכל $x, y \ge M$ מתקיים:

$|f(x)-f(y)| \le |f(x)-L| + |L-f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$ (1) (כלומר $f(x)$ רציפה במ"ש ב- $[M,\infty)$).

בקטע הקומפקטי $[0,M]$ הפונקציה $f(x)$ רציפה, לכן רציפה במידה שווה. כלומר, קיים $\delta > 0$ כך שאם $x, y \in [0,M],\ |x-y| < \delta$ אז $|f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$ (2).

נראה כעת ש- f רציפה במ"ש על $[0,\infty)$: עבור $\varepsilon > 0$ נתון תהי $\delta > 0$ כנ"ל. יהיו $x, y \in [0,\infty)$ כך ש- $|x-y| < \delta$. אם $x, y \in [0,M]$ או $x, y \in [M,\infty)$ אז ראינו כבר כי $|f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. נניח לכן כי $x < M < y$. אז:

$$\left.\begin{array}{l}(1) \Rightarrow |f(x)-f(M)| < \frac{\varepsilon}{2} \\ (2) \Rightarrow |f(y)-f(M)| < \frac{\varepsilon}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon .$$

ב. נתון: $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + a_{n+1}) = 0$. נניח בשלילה כי $\limsup a_n < 0$. אז נקבל כי:

$$0=\lim(a_n+a_{n+1})\overset{(1)}{=}\limsup(a_n+a_{n+1})\overset{(2)}{\le}\limsup a_n+\limsup a_{n+1}=2\limsup a_n<0$$

קיבלנו ש- 0>0, וזו סתירה המוכיחה את הנדרש.

שים לב ש- (1) מוצדק כיוון שלסדרה $\{a_n+a_{n+1}\}$ יש גבול, ו-(2) הוא תכונה ידועה של גבול עליון.

שאלה 6

א. צ"ל: $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}<\ln(1+x)<\frac{x}{\sqrt{1+x}}$, לכל 0<x.

אי-השויון השמאלי נובע בקלות מפיתוח טיילור:

$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\underbrace{\frac{x^5}{5}+\ldots}_{>0}>x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}$. (פשוט השמטנו חלק חיובי בפיתוח.)

כדי להוכיח את אי-השויון הימני נגדיר: $g(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x}}-\ln(1+x)$, $x>0$.

נשים לב כי $g(0)=0$. נראה ש- g עולה ממש, ולכן נקבל $g(x)>0,\ \forall x>0$ כנדרש.

נגזור: $g'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}-\frac{x}{2(1+x)^{3/2}}-\frac{1}{1+x}=\frac{1+x-\frac{1}{2}x-\sqrt{1+x}}{(1+x)^{3/2}}$. אז עבור $x>0$ מתקיים:

$g'(x)>0\Leftrightarrow 1+\frac{1}{2}x-\sqrt{1+x}>0\Leftrightarrow\left(1+\frac{1}{2}x\right)^2>\left(\sqrt{1+x}\right)^2\Leftrightarrow 1+x+\frac{1}{4}x^2>1+x$. אגף שמאל בבירור נכון, לכן הוכחנו כי g עולה ממש, כפי שרצינו.

ב. נניח בשלילה ש- $f^{(3)}(x)<3\ \forall x\in[-1,1]$. אז:

$$x>0\Rightarrow\int_0^x f^{(3)}(t)dt<\int_0^x 3dt\Rightarrow f''(x)-f''(0)<3x\Rightarrow f''(x)<3x+f''(0)\quad(1a)$$

$$x<0\Rightarrow\int_x^0 f^{(3)}(t)dt<\int_x^0 3dt\Rightarrow f''(0)-f''(x)<-3x\Rightarrow f''(x)>3x+f''(0)\quad(1b)$$

נסמן $a=f''(0)$, ונבצע אינטגרציה נוספת:

$$(1a)\Rightarrow f'(x)-\underbrace{f'(0)}_{0}=\int_0^x f''(t)dt<\int_0^x(a+3t)dt=ax+\frac{3}{2}x^2\Rightarrow f'(x)<ax+\frac{3}{2}x^2\quad(2a)$$

$$(1b)\Rightarrow f'(x)-\underbrace{f'(0)}_{0}=\int_x^0 f''(t)dt>\int_x^0(a+3t)dt=-ax-\frac{3}{2}x^2\Rightarrow f'(x)<ax+\frac{3}{2}x^2\quad(2b)$$

לכן קיבלנו בכל מקרה: $f'(x)<ax+\frac{3}{2}x^2$. אינטגרציה (אחרונה) לפי מקרים תתן:

$$x>0\Rightarrow f(x)-\underbrace{f(0)}_{0}=\int_0^x f'(t)dt<\int_0^x(at+\frac{3}{2}t^2)dt=\frac{a}{2}x^2+\frac{1}{2}x^3\quad(3a)$$

$$x<0\Rightarrow f(x)-\underbrace{f(0)}_{0}=\int_x^0 f'(t)dt>\int_x^0(at+\frac{3}{2}t^2)dt=-\frac{a}{2}x-\frac{1}{2}x^3\quad(3b)$$

הצבת $x=1$ ב-(3a) תניב: $1=f(1)<\frac{a}{2}+\frac{1}{2}\Rightarrow a>1$.

הצבת $x=-1$ ב-(3b) תניב: $0=f(-1)<-\frac{a}{2}-\frac{1}{2}\Rightarrow a<-1$.

זו כמובן סתירה. לכן קיימת נקודה $c\in[-1,1]$ כך ש- $f^{(3)}(c)\ge 3$.

שאלה 7

א. נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{|x|}{e^{|x-1|}}=\begin{cases}\frac{-x}{e^{1-x}}, & x<0\\ \frac{x}{e^{1-x}}, & 0\le x<1\\ \frac{x}{e^{x-1}}, & 1\le x\end{cases}$.

גזירות: ברור שהיא גזירה לכל $x\neq 0,1$ (כהרכבה של פונקציות גזירות). נבדוק בנקודות המיוחדות לפי הגדרת הנגזרת:

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{\frac{h}{e^{1-h}}-0}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{1}{e^{1-h}}=\frac{1}{e}$$

$$\lim_{h\to 0-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{\frac{-h}{e^{1-h}}-0}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{-1}{e^{1-h}}=-\frac{1}{e}$$

$\Leftarrow$ הגבול $\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$ לא קיים, לכן אין נגזרת בנק' x=0.

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{\frac{1+h}{e^h}-1}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{1+h-e^h}{he^h}\overset{(L)}{=}\lim_{h\to 0+}\frac{1-e^h}{e^h+he^h}=\frac{1-1}{1+0}=0$$

$$\lim_{h\to 0-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{\frac{1+h}{e^{-h}}-1}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{1+h-e^{-h}}{he^{-h}}\overset{(L)}{=}\lim_{h\to 0-}\frac{1+e^{-h}}{e^{-h}-he^{-h}}=\frac{1+1}{1-0}=2$$

$\Leftarrow$ הגבול $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ לא קיים, לכן אין נגזרת בנק' x=1.

נקודות אכסטרמום: תחילה נבדוק עבור $x\neq 0,1$ - בנק' האכסטרמום הנגזרת מתאפסת, לכן נגזור לפי תחומים ונשווה לאפס:

$$x<0\Rightarrow f'(x)=\frac{e^{1-x}\cdot(-1)-(-1)e^{1-x}\cdot(-x)}{e^{2(1-x)}}=\frac{e^{1-x}(-1-x)}{e^{2(1-x)}}$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow x=-1$$

$$0<x<1\Rightarrow f'(x)=\frac{e^{1-x}\cdot 1-(-1)e^{1-x}\cdot x}{e^{2(1-x)}}=\frac{e^{1-x}(1+x)}{e^{2(1-x)}}$$

$$f'(x)>0\ \forall x\in(0,1)$$

$$1<x\Rightarrow f'(x)=\frac{e^{x-1}\cdot 1-e^{x-1}\cdot x}{e^{2(x-1)}}=\frac{e^{x-1}(1-x)}{e^{2(x-1)}}$$

$$f'(x)<0\ \forall x\in(1,\infty)$$

מצאנו בינתיים רק נק' קיצון אחת: $x=-1$ (זו נק' מקסימום).

הנקודה $x=0$ היא נק' קיצון, כי $f(0)=0$, $f(x)=\frac{|x|}{e^{|1-x|}}>0\ \ \forall x\neq 0$ ולכן זו נק' מינימום (גלובלי).

הנקודה $x=1$ גם היא נק' קיצון, שכן ראינו (מחישוב הנגזרת בסביבתה) כי f עולה עבור $x<1$, ויורדת עבור $x>1$, ובנוסף f רציפה. מכאן נובע ש-$x=1$ נקודת מקסימום.

לסיכום, שלוש נקודות הקיצון הן: $x=-1, x=0, x=1$.

ב.

$$L=\lim_{x\to\infty}\left(\sin\tfrac{1}{x}+\cos\tfrac{1}{x}\right)^{x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}x\ln\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)}=e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln(\sin t+\cos t)}{t}}$$

שים לב שהשתמשנו ברציפות האקספוננט ובהחלפת משתנים $t=\frac{1}{x}$. בגבול במעריך נשתמש בלופיטל:

$$\lim_{t\to 0}\frac{\ln(\sin t+\cos t)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}=\frac{1}{1}=1\,.$$

לכן: $L=e$.

אוניברסיטת תל- אביב
הפקולטה למדעים מדויקים

25.2.2005

בחינה בחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 1
לתלמידי מתמטיקה שנה א.
המורה: מ. אפשטיין

משך הבחינה: 3.5 שעות. אין להשתמש בחומר עזר כלשהו.
ענה על 4 מבין השאלות הבאות - לפחות אחת, אבל לא יותר משתיים מבין השאלות 1, 2 ו- 3. כל שאלה- 25 נקודות.

<u>שאלה 1</u>

א. (**משפט** *Fermat*) תהי $f: A \to R$ ו $x_0 \in A$ נקודת הצטברות של כל אחת מהקבוצות $A \cap (-\infty, x_0)$ ו $A \cap (x_0, +\infty)$. הוכח: אם x_0 היא נקודת אכסטרמום יחסי של f ויש לה נגזרת בנקודה זו, אזי $f'(x_0)=0$.

ב. נסח והוכח את משפט *Rolle*

<u>שאלה 2</u>

א. הגדר את המושג סדרת *Cauchy*.

ב. נסח והוכח את קריטריון *Cauchy* להתכנסות סדרה ממשית.

<u>שאלה 3</u>

א. יהי I רווח ו $f: I \to R$ פונקציה בעלת תכונת *Darboux*. הוכח: אם בנקודה $x_0 \in I$ קיים אחד הגבולות הצדדיים של הפונקציה f, אזי גבול זה שווה ל $f(x_0)$.

ב. ציין מסקנה של הטענה שב-א.

<u>שאלה 4</u>

א. תהי $f: (0,\infty) \to R$, המוגדרת ע"י $f(x) = \sqrt{x}\sin\frac{1}{x} + \sqrt{x}$. בדוק האם פונקציה זו רציפה במידה שווה.

ב. תהי (a_n) סדרה, כך שלכל $n \ge 1$ קיים $a_{n+1} - a_n \ge \frac{1}{n}$. הוכח כי $\lim a_n = \infty$.

<u>שאלה 5</u>

א: הוכח כי לכל $x \in R$ קיים : $ln\left(1+x^2\right) \le 2x\,arctg\,x$.

ב. חשב את $\lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$. שאלה מעולה!

<u>שאלה 6</u>

א. תהי הסדרה $\left(a_n\right)$ בעלת שני גבולות חלקיים בלבד : $0, \dfrac{1}{2}$. נגדיר סדרה $\left(b_n\right)$ ע"י

$$b_n = \left|a_n - \frac{1}{4}\right|$$

לכל $n \in \mathbb{N}^*$. הוכח כי הסדרה $\left(b_n\right)$ מתכנסת.

ב. מצא כמה פתרונות למשוואה : $x = 2^{\frac{x}{2}}$.

<u>שאלה 7</u>

א. תהי $\left(a_n\right)$ הסדרה שבה $a_1 \in \left(0,1\right)$ ולכל $n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} = \sin a_n$. הוכח כי הסדרה $\left(a_n\right)$ מתכנסת.

ב. תן דוגמא לפונקציה מוגדרת על רווח ובעלת תכונת $Darboux$, שלה לפחות נקודת אי־רציפות אחת. נמק טענתך.

בהצלחה!!!

<u>מבחן בחדו"א 1</u> תאריך: 25.2.2005
מורה: מ. אפשטיין קוד: F-74

<u>שאלה 1</u>

א. <u>הוכחת משפט פרמה:</u> נניח בשלילה כי $f'(x_0)\neq 0$, ובלי הגבלת הכלליות $f'(x_0)>0$ (ההוכחה דומה למקרה השני).

לפי הגדרת הנגזרת, $0<f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. מכאן הביטוי שבתוך הגבול חיובי בסביבה מסויימת של x_0; כלומר קיים δ כך ש- $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0$ עבור כל x המקיים: $|x-x_0|<\delta$.

עבור $x_0<x<x_0+\delta$ נכפול בביטוי החיובי $x-x_0$ (ולכן סימן האי שיוויון לא ישתנה) ונקבל: $f(x)>f(x_0)$.

עבור $x_0>x>x_0-\delta$ נכפול בביטוי השלילי $x-x_0$ (ולכן סימן האי שיוויון יתהפך) ונקבל: $f(x)<f(x_0)$.

בסה"כ קיבלנו ש- f עולה בסביבה של x_0, וזאת בסתירה לכך ש- x_0 היא נקודת אכסטרמום מקומי של f. אם היינו מניחים בשלילה ש- $f'(x_0)<0$ היינו מקבלים שהפונקציה יורדת בסביבת x_0, וגם זו סתירה באותו אופן. לכן בהכרח: $f'(x_0)=0$.

ב. <u>משפט רול (Rolle):</u> תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה בקטע הסגור $[a,b]$ וגזירה בקטע הפתוח (a,b). נניח ש- $f(a)=f(b)$. אז קיימת נק' $c\in(a,b)$ כך ש: $f'(c)=0$.

<u>הוכחה:</u> ממשפט ויירשטרס, f רציפה בקטע קומפקטי ולכן מקבלת מקסימום ומינימום שם. כלומר, קיימים $x_1,x_2\in[a,b]$ כך ש- $f(x_1)=\min_{x\in[a,b]}f(x),\ f(x_2)=\max_{x\in[a,b]}f(x)$.

מקרה א' - $f(x_1)=f(x_2)$. מכאן מסיקים כי $f(x)=const$, ולכן $f'(x)=0$.

מקרה ב' - $f(x_1)\neq f(x_2)$. לפי התנאי, אחת מהנקודות x_1,x_2 היא נקודה פנימית של הקטע (שכן אחרת, שתיהן נק' קצה ואז מהנתון ערכי הפונקציה בהן זהים, ולכן אנו במקרה א').
נסמן נקודה זו ב-c. אז $c\in(a,b)$ זו נק' אקסטרומים יחסי של f, ו- f גזירה בה (כי גזירה בפנים הקטע), לכן ממשפט פרמה נקבל ש- $f'(c)=0$.

<u>שאלה 2</u>

א. <u>הגדרה</u>: סדרה $\{x_n\}$ נקראת סדרת קושי אם מתקיים התנאי:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N:\ \forall n,m>N\ |x_n-x_m|<\varepsilon.$$

ב. <u>משפט</u>: הסדרה הממשית $\{a_n\}$ מתכנסת $\Leftrightarrow$ היא סדרת קושי.

<u>הוכחה</u>: $(\Leftarrow)$ ידוע כי הסדרה מתכנסת, נאמר לגבול $a_n\xrightarrow{n\to\infty}a$. אז מהגדרת התכנסות,

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N:\forall n>N\ |a_n-a|<\varepsilon$$

$$\forall m>N\ |a_m-a|<\varepsilon$$

ואז מאי-שויון המשולש: $|a_n-a_m|\le|a_n-a|+|a-a_m|<\varepsilon$, וזאת לכל $\forall n,m>N$, כנדרש בתנאי קושי. (לכל ε מצאנו N שמקיים את ההגדרה).

($\Rightarrow$) כעת ידוע שהסדרה מקיימת את תנאי קושי, ויש להוכיח כי היא מתכנסת. תחילה נשים לב שהסדרה חסומה: עבור $\varepsilon = 1$ קיים N כך ש- $|a_n - a_{N+1}| < 1 \ \forall n > N$ (מתנאי קושי כאשר $m = N+1$), ולכן $a_{N+1} - 1 < a_n < a_{N+1} + 1, \ \forall n > N$.

לפי משפט בולצנו-ויירשטרס לסדרות, יש ל- $\{a_n\}$ תת-סדרה $\{a_{n_k}\}$ המתכנסת. נסמן: $l = \lim_{k\to\infty} a_{n_k}$. (1)

יהי $\varepsilon > 0$. כיוון ש- $\{a_n\}$ היא סדרת קושי, קיים N טבעי כך שאם $m, n > N$ אזי $|a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. (2)

מ-(1) נובע שקיים k_0 כך ש- $k_0 > N$ וגם $|a_{k_0} - l| < \frac{\varepsilon}{2}$.

היות ו- $k_0 > N$, נקבל מ-(2) כי לכל $n > N$ מתקיים $|a_n - a_{n_{k_0}}| < \frac{\varepsilon}{2}$. כעת מאי-שוויון המשולש:

$$|a_n - l| \le |a_n - a_{n_{k_0}}| + |a_{n_{k_0}} - l| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad \forall n > N$$

ומכאן קיבלנו $\lim_{n\to\infty} a_n = l$.

<u>שאלה 3</u>

א. תזכורת: ל- f יש תכונת דרבו על הרווח I אם לכל $a, b \in I$ $(a < b)$ ומספר μ בין $f(a)$ ל- $f(b)$ קיים $c \in (a,b)$ כך ש- $f(c) = \mu$.

<u>הוכחת המשפט:</u> תהי פונקציה $f : I \to \mathbb{R}$ בעלת תכונת דרבו על הרווח, כבנתון.

נניח כי הגבול הצדדי שקיים בנקודה x_0 הוא $f(x_0 - 0)$ (הגבול השמאלי). בשלילה נניח ש- $f(x_0 - 0) \ne f(x_0)$. בלי הגבלת הכלליות נאמר ש- $f(x_0 - 0) < f(x_0)$ (המקרה השני מטופל באופן זהה). יהי μ מספר כך ש- $f(x_0 - 0) < \mu < f(x_0)$. מהגדרת הגבול, נובע שקיים $a < x_0,\ a \in I$ כך שאם $x \in [a, x_0)$ אז $f(x) < \mu$. לכן, אף על פי ש- $f(a) < \mu < f(x_0)$, הפונקציה f לא מקבלת את הערך μ ברווח (a, x_0), וזאת בסתירה לתכונת דרבו. לכן קיבלנו $f(x_0 - 0) = f(x_0)$.

באופן דומה מוכיחים עבור גבול ימני.

ב. <u>מסקנה</u>: לפונקציה בעלת תכונת דרבו אין נק' אי רציפות מסדר ראשון.

(הסבר: בנק' אי-רציפות מסדר ראשון קיימים הגבולות הצדדיים $f(x_0 + 0),\ f(x_0 - 0)$. מהמשפט נובע כי $f(x_0 - 0) = f(x_0) = f(x_0 + 0)$, ולכן אין זו נק' אי-רציפות!)

<u>מסקנה נוספת</u>: פונקציה בעלת תכונת דרבו ברווח I שהיא גם חח"ע, היא פונקציה רציפה.

(הסבר: אם $x_0 < y_0$ ברווח, ונניח $f(x_0) < f(y_0)$, אז מתכונת דרבו $f((x_0, y_0))$ הוא רווח המכיל את $(f(x_0), f(y_0))$. אך מחד-חד ערכיות נובע שרווחים אלה שווים, כלומר f מונוטונית ולכן נק' אי-הרציפות האפשריות היחידות הן מסוג ראשון. אך ממסקנה קודמת אלה לא קיימות, לכן f רציפה).

<u>שאלה 4</u>

א. נתונה הפונקציה $f(x) = \sqrt{x}\sin\frac{1}{x} + \sqrt{x}$, המוגדרת בקרן $(0, \infty)$.

ברור כי זו פונקציה רציפה בתחום זה. נוכיח כי היא רציפה במידה שווה.

ראשית, נשים לב ש- $\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{x}\sin\frac{1}{x}+\sqrt{x}\right)=\lim_{x\to 0}\sqrt{x}\sin\frac{1}{x}=0$. לכן נוכל להרחיב את תחום ההגדרה ל- $[0,\infty)$, כאשר $f(0)=0$. הרחבה זו יוצרת פונקציה רציפה. נוכיח שהרחבה זו רציפה במ"ש (זה כמובן יותר חזק).

בקטע $[0,1]$ הפונקציה רציפה במ"ש לפי משפט קנטור (פונקציה רציפה על קטע קומפקטי היא רציפה במ"ש).

בקרן $[1,\infty)$ נראה שהנגזרת חסומה:

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(\sin\frac{1}{x}+1\right)+\sqrt{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cos\frac{1}{x}$$

$$|f'(x)|\le\frac{1}{2}\cdot 2+\frac{1}{1}\cdot 1=2$$

כעת, לפי משפט לגרנז' עבור $f(x)$, לכל $a<b$ קיים $c\in(a,b)$ כך ש- $|f(b)-f(a)|\le|f'(c)|\cdot(b-a)\le M(b-a)$. מכאן נוכיח רציפות במ"ש: נלך לפי ההגדרה. יהי $\varepsilon>0$. נבחר $\delta=\frac{1}{M}\varepsilon$. אז לכל $x,y\in\mathbb{R}$ המקיימים $|x-y|<\delta$, מתקיים:

$|f(x)-f(y)|\le M|x-y|<M\cdot\frac{1}{M}\varepsilon=\varepsilon$, כנדרש.

כעת, הוכחנו רציפות במידה שווה בשני הקטעים $(0,1],[1,\infty)$ בנפרד. נראה רציפות במ"ש באיחוד $(0,\infty)$: יהי $\varepsilon>0$. לפי מה שהוכחנו, יש δ_1,δ_2 שמתאימות לכל אחד מהקטעים הנ"ל ועונות להגדרה של רציפות במ"ש עם $\frac{\varepsilon}{2}$. נגדיר $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, ונטען שמתקיימת כעת ההגדרה של רציפות במ"ש עבור ε, כלומר אם $|x-y|<\delta$ אז $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$. אכן, אם $x,y\in(0,1]$ או $x,y\in[1,\infty)$ זה נובע מיד (כי $\delta<\delta_1,\delta_2$ ולכן אפילו $|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2}$). אך אם הנקודות בקטעים שונים, בה"כ $x<1,y>1$, אז נעזר בא"ש המשולש כדי לקבל:

$|f(x)-f(y)|\le|f(x)-f(1)|+|f(1)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$, כנדרש.

ב. תהי $\{a_n\}$ סדרה כך ש- $\forall n\ge 1,\ a_{n+1}-a_n\ge\frac{1}{n}$. מכאן נסיק:

$$a_{n+1}-a_1=(a_{n+1}-a_n)+(a_n-a_{n-1})+\ldots+(a_2-a_1)\ge\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\ldots+\frac{1}{2}+1=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

ידוע כי $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\infty$, כלומר לכל M קיים N כך ש- $n>N \Leftarrow a_{n+1}-a_1\ge\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}>M$. אז נסיק ש לכל M קיים N כך ש- $n>N \Leftarrow a_{n+1}>M+a_1$, וזה בדיוק אומר כי $\exists\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$.

<u>שאלה 5</u>

א. נגדיר: $g(x)=2x\arctan x-\ln(1+x^2)$, עבור $x\in\mathbb{R}$. צ"ל כי $g(x)\ge 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

נשים לב ש- $g(0)=0-\ln(1)=0$. כמו כן, g היא פונקציה רציפה וגזירה. נראה, אם כן, ש- $x=0$ היא נק' מינימום גלובלי שלה, ואז נסיים.

נגזור: $g'(x)=2\arctan x+2x\cdot\frac{1}{1+x^2}-\frac{2x}{1+x^2}=2\arctan x$.

מכאן רואים כי: $\begin{matrix} g\uparrow \Leftarrow g'(x)>0 \Leftarrow x>0 \\ g\downarrow \Leftarrow g'(x)<0 \Leftarrow x<0 \end{matrix}$. (בנוסף $g'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$).

לכן $x=0$ היא אכן נק' מינימום גלובלי של הפונקציה, ומכאן: $g(x)\ge g(0)=0$ $\forall x\in\mathbb{R}$, כנדרש.

ב. נפתח את הביטוי: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}} = \lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{1-\cos x}\cdot\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)} =$ [רציפות e^x] $=$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{1-\cos x}\cdot\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)\right)}$$

נעזר כעת בפיתוח טיילור סביב 0 של הפונקציות $\cos x, \sin x, \ln x$ ונבטא בעזרתם את הביטויים המופיעים בגבול.

$\cos x = 1-\frac{1}{2!}x^2+o(x^4)$, ולכן $\frac{1}{1-\cos x} = \frac{1}{\frac{1}{2}x^2+o(x^4)}$.

לפי הפיתוח של $\sin x$: $\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \ln\left(\frac{x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^5)}{x}\right) = \ln\left(1-\frac{1}{3!}x^2+o(x^4)\right)$. מפיתוח

של $\ln x$: $\ln(1+x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} = x+o(x^2)$, ולכן אצלנו:

$$\ln\left(1-\tfrac{1}{3!}x^2+o(x^4)\right) = -\tfrac{1}{3!}x^2+o(x^4)+\underbrace{o\left(\tfrac{1}{3!}x^2+o(x^4)\right)^2}_{o(x^4)} = -\tfrac{1}{6}x^2+o(x^4)$$

בסופו של דבר:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{1-\cos x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{-\frac{1}{6}x^2+o(x^4)}{\frac{1}{2}x^2+o(x^4)}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2\left(-\frac{1}{6}+o(x^2)\right)}{x^2\left(\frac{1}{2}+o(x^2)\right)}\right) = \frac{-1/6}{1/2} = -\frac{1}{3}$$

ולכן הגבול המקורי הוא $e^{-1/3}$.

<u>שאלה 6</u>

א. מהנתון מסיקים: לכל $\varepsilon>0$ קיים N טבעי, כך שלכל $n>N$ מתקיים: $|a_n-0|<\varepsilon$ <u>או</u> $|a_n-\frac{1}{2}|<\varepsilon$.

הסבר: אם אין זה כך, קיים $\varepsilon>0$ וסדרה $n_k \xrightarrow{k\to\infty} \infty$ של טבעיים, כך ש- $|a_{n_k}-0|\ge\varepsilon$ <u>וגם</u> $|a_{n_k}-\frac{1}{2}|\ge\varepsilon$. אך לכל סדרה ממשית יש גבול חלקי אחד לפחות, ואז לסדרה $\{a_{n_k}\}$ (ולכן גם ל- $\{a_n\}$) יש גבול חלקי ששונה מ- 0 ומ- $\frac{1}{2}$. זו סתירה לנתון.

מה שהסקנו אומר, שניתן לחלק את הסדרה המקורית $\{a_n\}$ לשתי תתי-סדרות $\{a_n\}=\{a_{n_k}\}\cup\{a_{n_l}\}$, כך ש- $\lim\limits_{k\to\infty}a_{n_k}=0,\ \lim\limits_{l\to\infty}a_{n_l}=\frac{1}{2}$ (את הרישא $\{a_n\}_{n=1}^{N}$ נוכל לצרף לאחת מהן, וזה לא ישפיע על ההתכנסות).

הוגדר: $b_n = \left|a_n - \frac{1}{4}\right|$. ממה שראינו על $\{a_n\}$ מתקיים $\{b_n\} = \{b_{n_k}\} \cup \{b_{n_l}\}$, וכן:

$$\left.\begin{array}{l} b_{n_k} = \left|a_{n_k} - \frac{1}{4}\right| \xrightarrow{k\to\infty} \left|0 - \frac{1}{4}\right| = \frac{1}{4} \\ b_{n_l} = \left|a_{n_l} - \frac{1}{4}\right| \xrightarrow{l\to\infty} \left|\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right| = \frac{1}{4} \end{array}\right\} \Leftarrow \exists \lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{4}.$$

ב. $\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln 2}{2} \Leftrightarrow x^{\frac{1}{x}} = 2^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x = 2^{\frac{x}{2}}$ (שים לב שהצעדים לגיטימיים כי $x=0$ אינו פתרון).

נסמן $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ ונבצע חקירת פונקציה:

תחום ההגדרה של $f(x)$: $(0,\infty)$.

תחומי עליה וירידה:

$$f'(x) = \frac{x\cdot\frac{1}{x} - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}$$

$$x < e \Rightarrow \ln x < 1 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow$$

$$x = e \Rightarrow f'(e) = 0$$

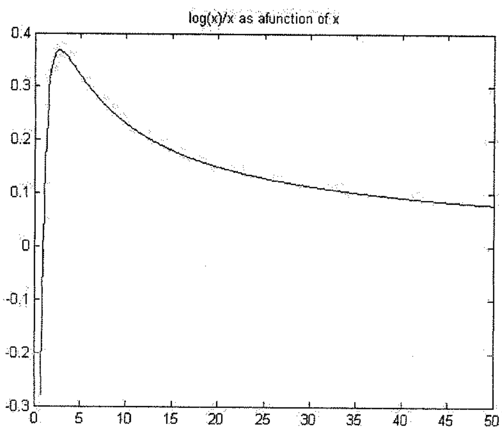
$$x > e \Rightarrow \ln x < 1 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow$$

לכן ברור ש- $x=e$ נקודת מקסימום, שם $f(e) = \frac{1}{e}$.

בנוסף נחשב גבולות בקצוות:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x} \overset{(L)}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{1} = 0 \ (L'hopital's\ rule)$$

$$\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0}\frac{\ln x}{x} = (\lim_{x\to0}\ln x)(\lim_{x\to0}\frac{1}{x}) = -\infty\cdot\infty = -\infty$$



כעת, מרציפות הפונקציה ומצורת הגרף שלה (שקיבלנו לפי החקירה), נסיק שאם $0 < \alpha < \frac{1}{e}$ אז למשוואה $f(x) = \alpha$ יש בדיוק 2 פתרונות (אחד בקטע $(0,e)$ ואחד בקרן (e,∞)).

מתקיים: $0 < \frac{\ln 2}{2} = f(2) < f(e) = \frac{1}{e}$,

ולכן נסיק כי למשוואה $f(x) = f(2)$ (אותה נתבקשנו לחקור) קיימים בדיוק שני פתרונות. [הפתרונות הם $x=2, x=4$].

<u>שאלה 7</u>

א. נראה כי הסדרה (a_n) היא מונוטונית יורדת וחסומה מלמטה, ומכאן ינבע (ע"פ משפט) שיש לה גבול.

נראה זאת באינדוקציה על n, כי $0 < a_{n+1} < a_n$ (זה מראה את שני התנאים הדרושים גם יחד).

ידוע שעבור $0 < x < \pi/2$ מתקיים $0 < \sin x < x$ (*).

עבור n=0 מתקיים $0<a_0<1<\pi/2$, (ולכן החסם התחתון נכון), ולפי (*) נובע ש-
$0<a_1=\sin a_0<a_0$. כעת נניח את טענתנו עבור n-1; זה אומר בפרט ש- $0<a_n<a_{n-1}<\pi/2$.
לכן אפשר להשתמש ב-(*) ולקבל: $0<a_{n+1}=\sin a_n<a_n$, כנדרש!
הוכחנו שהסדרה מונוטונית יורדת וחסומה ע"י 0, לכן היא מתכנסת.

ב. נגדיר: $f(x)=\begin{cases}\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

לפונקציה זו נק' אי-רציפות יחידה בנק' $x=0$, משום שהגבול $\lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$ לא קיים. (בנקודות אחרות הפונקציה רציפה כהרכבה של רציפות). נראה של- f יש תכונת דרבו על $\mathbb{R}$.
יהיו $u<v$. אם $0\notin(u,v)$, אז f רציפה ברווח (u,v) , ולכן (ממשפט) יש לה תכונת דרבו שם [כלומר $f((u,v))$ הוא רווח].
אם $0\in(u,v)$, אז קיים $1\le p\in\mathbb{N}$ כך ש- $J_0=\left[\frac{1}{(p+1)\pi},\frac{1}{p\pi}\right]\subset(u,v)$. היות ו- f רציפה ב- J_0 נובע ש- $f(J_0)$ הוא רווח, דהיינו $[-1,1]$. מתקיים: $[-1,1]=f(J_0)\subset f((u,v))\subset[-1,1]$, לכן $f((u,v))=[-1,1]$ הוא רווח. זה בדיוק אומר שתכונת דרבו מתקיימת.

9

F-72

אוניברסיטת תל-אביב
הפקולטה להנדסה

5.09.04
מועד א' סמ' קיץ
תשס"ד

בחינה בחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי I
המרצה: ד"ר ס. קוסטיקובסקי

משך הבחינה 3 שעות.
חומר עזר - אסור.
ענה על 4 מבין השאלות הבאות,
לפחות אחת מבין השאלות 1 ו-2.

1. תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה. הוכח כי f רציפה במידה שווה על $[a,b]$.

2. תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה. הוכח כי לכל λ בין $f'(a)$ ל-$f'(b)$ קיים c בין a ל-b כך ש- $\lambda=f'(c)$.

3. א) הוכח כי לכל $-1\le x\le 0$ מתקיים $\arcsin\sqrt{1-x^2}+\arccos x=\pi$.
ב) האם פונקציה $f(x)=\sqrt{x}\sin\frac{1}{x}$ רציפה במידה שווה על $(0,\infty)$?

4. א) חשב את $\lim_{n\to\infty}\frac{\cos(x+\frac{1}{n})-\cos x}{1/n}$ עבור $x\in\mathbb{R}$.
ב) תהי $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ רציפה כך שקיים $L=\lim_{x\to\infty}f$, $f(0)<L$.
הוכח כי קיים $x_0\in[0,\infty)$ כך שלכל x $f(x_0)\le f(x)$ $(x\in[0,\infty))$

5. א) חשב את $\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x}$ כאשר $a,b>0$.
ב) תהי $a_{n+1}=3+\frac{1}{a_n}$, $a_1=1$. הוכח כי הסדרה מתכנסת וחשב את גבולה.

6. א) תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ - רציפה, המקיימת $f(x^2)=f(x)$ לכל $x\in[0,1]$.
הוכח כי f- קבועה.
ב) כמה פתרונות קיימים ל- $f'(x)=0$ כאשר $f(x)=(x-1)(x-2)\dots(x-n)$?

בהצלחה!

9

מחברת מס׳ ____
מתוך ____ מחברות

TEL AVIV UNIVERSITY אוניברסיטת תל-אביב

לפני התחלת הבחינה מלא את כל הפרטים הבאים בכתב ברור וקרא בעיון את ההוראות:

1. על הנבחן להיבחן רק בחדר שבו הוא רשום. 22
2. עם הכניסה לחדר הבחינה יש להניח את החפצים בצד לרבות מכשירי קשר ואמצעי תקשורת אחרים כשהם כבויים. 25
3. אסור להחזיק בהישג יד, בחדר הבחינה או בסמוך לו, כל חומר הקשור לבחינה/לקורס פרט לחומר שהשימוש בו הותר בכתב על ידי המורה.
4. יש למלא את הפרטים על מחברת הבחינה במקום המיועד לכך בלבד. אין לכתוב את השם או כל פרט מזהה אחר בתוך המחברת. 25
5. יש להישמע להוראות המשגיח. נבחן לא יעזוב את מקומו ללא קבלת רשות המשגיח. הפונה בשאלה או בבקשה ירים את ידו. 25
6. נבחן שנכנס לחדר הבחינה וקיבל את השאלון (טופס הבחינה) לידו ייחשב כמי שנבחן במועד זה. היה והחליט לא לכתוב את הבחינה, לא יהא רשאי לעזוב את חדר הבחינה, אלא כעבור חצי שעה ממועד תחילתה ולאחר שהחזיר את המחברת והשאלון. ציונו בבחינה יהיה "0".
7. קריאת השאלון מותרת רק לאחר קבלת רשות המשגיח.
8. יש לכתוב את התשובות בעט, בכתב יד ברור ונקי. נבחן הבוחר לכתוב טיוטה יעשה זאת בעמודו הימני של דפי מחברת הבחינה ויציין בראש העמוד "טיוטה". אין לתלוש דפים מהמחברת.
9. מחברות הבחינה שקיבל הנבחן תהיינה בפיקוחו ובאחריותו במשך כל הבחינה. בעת יציאה מן החדר יופקדו המחברות והשאלון בידי המשגיח.
10. בתום הבחינה יחזיר הנבחן את המחברות והשאלון ויקבל מידי המשגיח את כרטיס הנבחן.
11. הנוהג בניגוד להוראות ול"נוהל סדרי בחינות ודיווח ציונים" צפוי להפסקת בחינתו ואף להעמדה לדין משמעתי.
12. **אין לכתוב מעבר לקו האדום משני צידי הדף.**

בהצלחה.

לשימוש המורה הבוחן:

הציון	97
המחברת נבדקה ביום	
חתימת המורה	JS

תאריך הבחינה 05.09.05

שם הקורס חדו״א 1

שם המורה סרג׳ קוסטובובסקי

החוג/המגמה מתמטיקה

מס׳ זיהוי (העתק מכרטיס הנבחן/התלמיד)
0 3 7 0 7 1 0 2 4

66532

03661101201
037071024 9

שאלה 1

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה. נוכיח שהיא גם רציפה במידה שווה על $[a,b]$.

יהי $\varepsilon>0$.

מרציפות f נסיק כי לכל $x_0\in[a,b]$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $x\in[a,b]$ המקיים $|x-x_0|<\delta$ מתקיים גם $|f(x)-f(x_0)|<\frac{\varepsilon}{2}$ (3)

נניח בשלילה כי f אינה רציפה במידה שווה על $[a,b]$
כלומר קיים $\varepsilon_0>0$ כך שלכל $\delta>0$ קיימים $x,y\in[a,b]$ המקיימים $|x-y|<\delta$ אולם $|f(x)-f(y)|\ge\varepsilon_0$.

נגדיר הסדרות $(\delta_n)\xrightarrow[\text{מונוטונית}]{}0$, $(x_n),(y_n)$ ב-$[a,b]$,
כך שלכל n טבעי: ~~[illegible]~~

$$|x_n-y_n|<\delta_n \ (1), \text{ אולם } |f(x_n)-f(y_n)|\ge\varepsilon_0 \ (2).$$

(x_n) סדרה חסומה, לכן לפי משפט בולצאנו-ויירשטראס קיימת תת-סדרה, (x_{n_k}), המתכנסת לגבול סופי, $x_0\in[a,b]$
נשים-לב שגם (y_{n_k}) מתכנסת לאותו גבול, שהרי מ-(1) נובע:

$$|x_{n_k}-y_{n_k}|=|y_{n_k}-x_{n_k}|<\delta_{n_k} \iff -\delta_n<y_{n_k}-x_{n_k}<\delta_n$$

ומכיון ש-$\delta_n\xrightarrow[\text{מונוטונית}]{}0$ נסיק באמצעות כלל הסנדוויץ':

$$-\delta_n+x_{n_k}<y_{n_k}<x_{n_k}+\delta_n \;\longrightarrow\; x_0$$

(4)
מכאן, שכמעט לכל k, $|x_{n_k}-x_0|<\delta_n,\ |y_{n_k}-x_0|<\delta_n$
ומרציפות f ב-$[a,b]$, ובפרט ב-$x_0\in[a,b]$, נקבל:

$$|f(x_{n_k})-f(y_{n_k})|\underset{\text{אש"מ המשולש}}{\le}|f(x_{n_k})-f(x_0)|+|f(y_{n_k})-f(x_0)|\underset{(3),(4)}{<}\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

- בסתירה ל-(2).

שאלה ב

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה. תהי f' נגזרתה.

בלי הגבלת הכלליות נניח $f'_+(a) < f'_-(b)$.

יהי λ: $\underset{(1)}{f'_+(a)<\lambda<f'_-(b)}$. נוכיח שקיים $c\in[a,b]$ שעבורו $f'(c)=\lambda$

נגדיר: $F(x):=f(x)-\lambda x$

F גזירה ב-$[a,b]$, כהפרש פונקציות גזירות ב-$[a,b]$, ובוודאי רציפה שם. לכן ממשפט ויירשטראס F מקבלת את חסמיה, בפרט את המינימום.

ראשית נוכיח כי המינימום של F אינו מתקבל בקצות הקטע.

מתקיים:

$$\lim_{x\to a^+}\frac{F(x)-F(a)}{x-a}=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-\lambda x-f(a)+\lambda a}{x-a}=$$

$$\lim_{x\to a^+}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-\lambda\frac{(x-a)}{x-a}\right)=f'_+(a)-\lambda\underset{(1)}{<}0$$

מכיוון שבכל סביבה ימנית של a מתקיים $(x-a)>0$, נסיק כי קיימת סביבה ימנית של a בה לכל x, $F(x)<F(a)$

בנוסף:

$$\lim_{x\to b^-}\frac{F(x)-F(b)}{x-b}=\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)-\lambda x-f(b)+\lambda b}{x-b}=$$

$$\lim_{x\to b^-}\left(\frac{f(x)-f(b)}{x-b}-\lambda\frac{(x-b)}{x-b}\right)=f'_-(b)-\lambda\underset{(1)}{>}0$$

וכעת מפני שבכל סביבה שמאלית של b מתקיים $(x-b)<0$ נסיק כי קיימת סביבה שמאלית של b בה לכל x, $F(x)<F(b)$

הוכחנו אם-כן שהמינימום אינו מתקבל בקצוות הקטע.

מכאן שהוא מתקבל באיזושהי נקודה פנימית c, $c\in(a,b)$.

F כזכור גזירה בכל הקטע, לכן ממשפט פרמה נסיק:

(c קיצון מוחלט בפרט נקודת קיצון מקומי)

$$F'(c)=0\Rightarrow f'(c)-\lambda=0\Rightarrow f'(c)=\lambda$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(\sin\frac{1}{x}+x\right)+\sqrt{x}\left(-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}+1\right)$$

$2x$

$$\sqrt{x}\left(\frac{1}{2}\frac{\sin\frac{1}{x}}{x}+\cancel{1}-\frac{\cos\frac{1}{x}}{x^2}-\cancel{1}\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2}\sin\frac{1}{x}-\frac{\cos\frac{1}{x}}{x}\right)$$

$$\sin\left(x+\frac{1}{n}+\frac{\pi}{2}\right)-\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) \quad 2\sin\left(\frac{1}{2n}\right)\cos\left(\frac{2x+\pi+\frac{1}{n}}{2}\right)$$

$f(0)+\alpha=L$

$\frac{1}{2}\frac{1}{n}$

$|f(x)-L|<\varepsilon$

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2n}\right)$$

$$\sin\left(x+\pi+\frac{1}{2n}\right) \quad |f(x)-L|<\varepsilon$$

$-f(0)+L<f(x)<L+f(0)$

$f(0)<L$

$-f(0)+L<f(x)$

$-\alpha<f(x)-L<\alpha$

$f(0)\leq f(0)<L$

$f(x_0)\leq f(0)=L-\alpha<f(x)$

$f(0)+\alpha=L \quad \alpha>0 \quad f(0)<L$

$x>B \quad B>0 \quad f\xrightarrow[x\to\infty]{}L$

$f(0)=L-\alpha \quad -\alpha<f(x)-L<\alpha \Leftarrow |f(x)-L|<\alpha$

$[0,B]$

$f(x)\leq f(0)$, $x>B$, $f(x)$

$$\cos\left(x+\frac{1}{n}\right) \quad \sin\left(x+\frac{1}{n}+\frac{\pi}{2}\right)-\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) \quad \frac{2\sin\frac{1}{2n}\cos\left(x+\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2n}\right)}{\frac{1}{n}}$$

שאלה 4

א)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\cos(x+\frac{1}{n})-\cos x}{\frac{1}{n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(x+\frac{1}{n}+\frac{\pi}{2})-\sin(x+\frac{\pi}{2})}{\frac{1}{n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sin(\frac{1}{2n})\cos(x+\frac{1}{2n}+\frac{\pi}{2})}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(\frac{1}{2n})\cdot\cos(x+\frac{1}{2n}+\frac{\pi}{2})}{\frac{1}{2n}} \quad (1)$$

קיימים הגבולות הבאים:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(\frac{1}{2n})}{\frac{1}{2n}}=\lim_{\frac{1}{2n}\to 0}\frac{\sin(\frac{1}{2n})}{\frac{1}{2n}}=1 \quad (2)$$

$$\lim_{n\to\infty}\cos(x+\frac{1}{2n}+\frac{\pi}{2}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{מרציפות} \\ \text{cosine}}}{=} \cos(\lim_{n\to\infty}[x+\frac{1}{2n}+\frac{\pi}{2}])=\cos(x+\frac{\pi}{2}) \quad (3)$$

ולכן:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\cos(x+\frac{1}{n})-\cos x}{\frac{1}{n}} \underset{\substack{\uparrow \\ (1)}}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{\sin(\frac{1}{2n})}{\frac{1}{2n}}\cdot\lim_{n\to\infty}\cos(x+\frac{1}{2n}+\frac{\pi}{2}) \underset{\substack{\uparrow \\ (2),(3)}}{=}$$

$$=\cos(x+\frac{\pi}{2})$$

ב) נתון $f(0)<L$.

נגדיר $\alpha>0$ כך שיתקיים: $f(0)+\alpha=L$.

מכיוון ש- $\lim_{x\to\infty}f(x)=L$ לכל $\varepsilon>0$, ובפרט עבור $\alpha>0$, קיים $B\in[0,\infty)$ כך שלכל $x>B$ $|f(x)-L|<\alpha$.

כלומר: $-\alpha<f(x)-L<\alpha \Leftarrow f(0)=L-\alpha<f(x)<L+\alpha$ (1).

f רציפה, ובפרט ב- $[0,B]$, ולכן לפי משפט ויירשטראס מקבלת את חסמיה, בפרט את המינימום. כלומר קיים $x_0\in[0,B]$ המקיים שלכל x ב- $[0,B]$, $f(x_0)\le f(x)$ (2)

לכל $x\in[B,\infty)$ מתקיים מ- (1) $f(x_0)\le f(0)<f(x)$ (3).

מכאן ש- $f(x_0)\le f(x)$ לכל $x\in[0,B]$ (2) ולכל $x\in[B,+\infty)$ (3)

$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = a^x = e^{x\ln a}$

$e^{x\ln a}\ln a$

$\left(1+\left(\frac{a^x+b^x}{2}-1\right)^{\frac{1}{\frac{a^x+b^x}{2}-1}}\right)^{\frac{\frac{a^x+b^x}{2}-1}{x}} \Rightarrow \sqrt{ab}$

$\frac{1}{2}\cancel{\left(1+(a^x+b^x-1)\right)}$

$\frac{1}{2}(a^x\ln a + b^x\ln b)$

$1, 2, 2.5$

$L = 3 - \frac{1}{L}$

$L^2 = 3L - 1$

$L^2 - 3L + 1 = 0$

$3 \pm \sqrt{9-4}$

$\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

$\frac{3+\sqrt{5}}{2} = L$

$1 < a_n < 3$

$\frac{1}{3} < \frac{1}{a_n} < 1$

$-1 < -\frac{1}{a_n} < -\frac{1}{3}$

$1 < a_n < L$

$\frac{1}{L} < \frac{1}{a_n} < 1$

$-1 < -\frac{1}{a_n} < -\frac{1}{L}$

$2 < a_{n+1} = 3 - \frac{3+\sqrt{5}}{2}$

$\frac{6-3-\sqrt{5}}{2} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$

$2 < a_{n+1}$

$\frac{a^x+b^x}{2} \to 1$

$a_n < 3$

$-\frac{1}{a_n} < -\frac{1}{3}$

$a_n < 3$

$\cancel{a_n > a_{n-1}}$

$a_{n-1} < a_n$

$-a_n < -a_{n-1}$

$a_n = 3 - \frac{1}{a_{n-1}} < 3 - \frac{1}{a_n} = a_{n+1}$

$1 < a_n$

$-1 < -\frac{1}{a_n}$

$-3 < -a_n$

$-\frac{1}{a_n} < -\frac{1}{3}$

$a_{n+1} < \frac{8}{3} < L$

$2 < a_n$

$2 < a_n$

$-3 < a_n$

$-a_n < 3$

$\frac{1}{2} < a_n$

$-a_n < -\frac{1}{2}$

$-2 < -\frac{1}{a_n}$

$1 < a_n$

$-a_n < -1$

$-1 < -\frac{1}{a_n}$

$2 < a_{n+1}$

$a_n < 3$

$-3 < -a_n$

$-\frac{1}{a_n} < -\frac{1}{3}$

$\frac{1}{3} < -\frac{1}{a_n}$

$< a_{n+1}$

$f(x) = 3 - \frac{1}{x}$

$f'(x) = \frac{1}{x^2}$

$\cancel{x} > 0$

$a_{n-1} < a_n$

$-a_n < -a_{n-1}$

$3 - \frac{1}{a_{n-1}} < 3 - \frac{1}{a_n} = a_{n+1}$

שאלה 5

א) נעזר בעובדה שלכל $a>0$, $\lim_{x\to 0} a^x = 1$

מתקיים:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{a^x+b^x}{2}-1}{x} \underset{\text{לופ}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\left(a^x\ln a+b^x\ln b\right) \underset{\text{מרציפות}}{=} \frac{\ln a+\ln b}{2} \qquad (1)$$

$x\neq 0$ בסביבה מנוקבת, גבול המונה והמכנה 0.

לכן הגבול של נו:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\left(\left(1+\left[\frac{a^x+b^x}{2}-1\right]\right)^{\frac{1}{\frac{a^x+b^x}{2}-1}}\right)^{\frac{\frac{a^x+b^x}{2}-1}{x}}$$

מכיוון ש: $\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}-1\right)=1-1=0$ נקבל:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \underset{\uparrow}{=} e^{\lim_{x\to 0}\frac{\frac{a^x+b^x}{2}-1}{x}} \underset{(1)}{=} e^{\frac{\ln a+\ln b}{2}} =$$

מסגולות קיום גבול מורכב (וכן e רציפה)

$$= e^{\frac{\ln a}{2}}\cdot e^{\frac{\ln b}{2}} = e^{\ln\sqrt{a}}\cdot e^{\ln\sqrt{b}} = \sqrt{ab}$$

ב)

$a_{n+1}=3-\frac{1}{a_n}$ (ממש), $a_1=1$

נוכיח באינדוקציה על n כי (a_n) מונוטונית עולה, לכל n טבעי.

מתקיים (בסיס האינדוקציה):

$a_1=1<2=3-\frac{1}{1}=a_2$

נניח שהטענה מתקיימת עבור n ונוכיח עבור $n+1$.

מהנחת האינדוקציה: $a_n>a_{n-1}$.

לכן:

$$-\frac{1}{a_n}>-\frac{1}{a_{n-1}} \Rightarrow a_{n+1}=3-\frac{1}{a_n}>3-\frac{1}{a_{n-1}}=a_n$$

והוכחנו $a_n<a_{n+1}$.

נוכיח כעת באינדוקציה על n כי $a_n<3$ לכל n טבעי:

מתקיים (בסיס האינדוקציה):

$a_1=1<3$, $a_2=2<3$

נניח קיומה של הטענה עבור n, נוכיחה עבור $n+1$:

מהנחת האינדוקציה: $a_n<3$. לכן: $-a_n>-3 \Rightarrow -\frac{1}{a_n}<-\frac{1}{3}$

- מכיוון ש-(a_n) מונוטונית עולה לכל n, ו- $a_n=1$,
נסיק כי לכל n $1\le a_n$.

לסיכום, הוכחנו מונוטוניות (עולה ממש) של (a_n)
ואת חסימות של הסדרה: $1\le a_n<3$.

- אם לסדרה יש גבול L, אזי ערכו מקיים:

$$L=3-\frac{1}{L} \Rightarrow L^2-3L+1=0 \Rightarrow L_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9-4}}{2}$$

$$\left(L=\frac{3+\sqrt5}{2}\right)\vee\left(L=\frac{3-\sqrt5}{2}\right).$$

אולם מכיוון ש-(a_n) מונוטונית עולה וחסומה, אז בהכרח קיים לה גבול.

אך מכיוון ש- $\sqrt4<\sqrt5 \Leftarrow 2<\sqrt5$, נקבל $\frac{3-\sqrt5}{2}<\frac{1}{2}$
ובוודאי שאינו הגבול.

מכאן שהסדרה מתכנסת וגבולה $\frac{3+\sqrt5}{2}$.

5 בספטמבר 2004

בחינת מעבר בחשבון דיפרנציאלי 0366-1101

מועד ב׳ תשס״ד

פרופ׳ זאב שוס, ניר לב

אין להשתמש בכל חומר כתוב או מודפס. משך המבחן 3 שעות. נסח את המשפטים עליהם הנך מתבססות. יש לענות על 4 שאלות ולפחות על אחת בכל חלק.

חלק א׳

1. (א) (5 נק׳) הגדר את המושגים „קבוצה קומפקטית של מספרים ממשיים" ו„קבוצה קומפקטית סדרתית של מספרים ממשיים". (ב) (20 נק׳) הוכח שקבוצת מספרים ממשיים היא קומפקטית אם ורק אם היא קומפקטית סדרתית.

2. (25 נק׳) הוכח/י כי לפונקציה רציפה בקבוצה קומפקטית יש מינימום ומכסימום.

3. (א) (5 נק׳) הגדר את המושג „פונקציה קמורה בקטע". (ב) (20 נק׳) הוכח כי פונקציה קמורה בקטע פתוח רציפה בו.

4. (א) (25 נק׳) הוכח שתכונת ערך הביניים (א) (10 נק׳) הכרחית, (ב) (15 נק׳) אך לא מספיקה לרציפות של פונקציה בקטע.

חלק ב׳

5. (א) (25 נק׳) חשב את הגבול $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{1-\cos x}-\dfrac{2}{x^2}\right]$ בעזרת נוסחת Taylor או בכל דרך אחרת.

6. (25 נק׳) הוכח/י את אי-השוויון $\dfrac{x}{1+x}<\log(1+x)<x$ לכל $x>0$ ולכל $-1<x<0$.

7. נגדיר $a_n=\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{1}{j}-\log n$. (א) (15 נק׳) הוכח $\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n}<a_{n+1}-a_n<0$. (*הדרכה*: העזר/י במשפט ערך הביניים של Lagrange או בתרגיל 6 לעיל). (ב) (10 נק׳) הוכח שהסדרה $\{a_n\}$ מתכנסת.

8. תהי $y=f(x)$ פונקציה בעלת שתי נגזרות בקטע. יהיו N_1,N_2 הנורמלים לגרף הפונקציה בנקודות $(x_1,f(x_1))$, $(x_2,f(x_2))$, בהתאמה, ותהי (ξ,η) נקודת החיתוך שלהם. (א) (15 נק׳) מצא/י את הגבולות $X=\lim\limits_{x_2\to x_1}\xi,\ Y=\lim\limits_{x_2\to x_1}\eta$. (ב) (10 נק׳) הוכח/י כי הנקודה (X,Y) היא מרכז המעגל הצמוד בנקודה $(x,f(x))$.

בהצלחה!!!!

F-73

15

מחברת מס' ____
מתוך ____ מחברות

TEL AVIV UNIVERSITY אוניברסיטת תל-אביב

לפני התחלת הבחינה מלא את כל הפרטים הבאים בכתב ברור וקרא בעיון את ההוראות:

1. על הנבחן להיבחן רק בחדר שבו הוא רשום.
2. עם הכניסה לחדר הבחינה יש להניח את החפצים בצד לרבות מכשירי קשר ואמצעי תקשורת אחרים כשהם כבויים.
3. אסור להחזיק בהישג יד, בחדר הבחינה או בסמוך לו, כל חומר הקשור לבחינה/לקורס פרט לחומר שהשימוש בו הותר בכתב על ידי המורה.
4. יש למלא את הפרטים על מחברת הבחינה במקום המיועד לכך בלבד. אין לכתוב את השם או כל פרט מזהה אחר בתוך המחברת.
5. יש להישמע להוראות המשגיח. נבחן לא יעזוב את מקומו ללא קבלת רשות המשגיח. הפונה בשאלה או בבקשה ירים את ידו.
6. נבחן שנכנס לחדר הבחינה וקיבל את השאלון (טופס הבחינה) לידו ייחשב כמי שנבחן במועד זה. היה והחליט לא לכתוב את הבחינה, לא יהא רשאי לעזוב את חדר הבחינה, אלא כעבור חצי שעה ממועד תחילתה ולאחר שהחזיר את המחברת והשאלון. ציונו בבחינה יהיה "0".
7. קריאת השאלון מותרת רק לאחר קבלת רשות המשגיח.
8. יש לכתוב את התשובות בעט, בכתב יד ברור ונקי. נבחן הבוחר לכתוב טיוטה יעשה זאת בעמודו הימני של דפי מחברת הבחינה ויציין בראש העמוד "טיוטה". אין לתלוש דפים מהמחברת.
9. מחברות הבחינה שקיבל הנבחן תהיינה בפיקוחו ובאחריותו במשך כל הבחינה. בעת יציאה מן החדר יופקדו המחברות והשאלון בידי המשגיח.
10. בתום הבחינה יחזיר הנבחן את המחברות והשאלון ויקבל מידי המשגיח את כרטיס הנבחן.
11. הנוהג בניגוד להוראות ול"נוהל סדרי בחינות ודיווח ציונים" צפוי להפסקת בחינתו ואף להעמדה לדין משמעתי.
12. אין לכתוב מעבר לקו האדום משני צידי הדף.

בהצלחה.

לשימוש המורה הבוחן:

הציון 95
המחברת נבדקה ביום ____
חתימת המורה ____

תאריך הבחינה 5/9/04
שם הקורס חדו"א 1
שם המורה פרופ' אבינר שמש
החוג/המגמה מדעי המחשב

מס' זיהוי
(העתק מכרטיס הנבחן/התלמיד)

66542

03661101072
038771564 15

חלק ט'

(ב) צ"ל: פונקציה רציפה בקב' קומפקטית A יש מינימום ומקסימום.

לפי המשפט: A קב' קומפקטית אם"ם היא סגורה וחסומה

אז צ"ל: אז פונ' רציפה בקב' סגורה וחסומה (קומפ')

A שאז יש לה מינימום ומקסימום.

A לאו דווקא קטע!

הוכחה: נסמן: $A=[a,b]$ ~~(a,b סופיים כי A חסומה וסגורה)~~

נניח בשלילה כי f לא חסומה

ב-$[a,b]$ אז לכל n קיים $x_n\in[a,b]$

כך ש- $|f(x_n)|>n$

נניח בה"כ כי לא חסומה מלעיל אז

לכל n קיים $x_n\in[a,b]$

כך ש- $f(x_n)>n$

כיוון שלכל n $x_n\in[a,b]$ אז $\{x_n\}$ סדרה

חסומה ולפי ש.B בסבבך יש לה

תת סדרה מתכנסת $\{x_{n_j}\}\xrightarrow[(j\to\infty)]{} x_0$

(ש.B - לכל סדרה חסומה יש תת סדרה מתכנסת)

כיוון שלכל $j\in\mathbb{N}$ $x_{n_j}\in[a,b]$ אז גם $x_0\in[a,b]$

ולכן f רציפה ב-x_0.

לפי הגדרת קושי לרציפות בנק' x_0 לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$

⊛ כך שלכל $x\in[a,b]$, $0<|x-x_0|<\delta$

מתקיים $|f(x)-L|<\varepsilon$ כיוון ש f רציפה

ב-x_0 כיוון לשוין $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

(אם f רציפה ב-x_0 אז $\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$)

אבל לכל $\delta>0$ קיים $J\in\mathbb{N}$ כך שלכל $j>J$

מתקיים $0<|x_0-x_{n_j}|<\delta$ [הגדרת הגבול] ולכן מ- ⊛

מתקיים $|f(x_{n_j})-f(x_0)|<\varepsilon$ כלומר $f(x_{n_j})\to f(x_0)$

אבל [illegible] מתקיים לכל n_j [illegible]!

$$f(x_{n_j}) > n_j$$

<u>סתירה</u> לכך ש- $f(x_{n_j}) \xrightarrow[(j\to\infty)]{} f(x_0)$.

[באותו אופן לגבי חסם תחתון] ולכן f חסומה ב- $[a,b]$.

כשהקומפקטית $=[a,b]$ נניח בשלילה כי M איננו מקסימום.

ניקח $x\in A$, ו- $\{x_n\}$ סדרה כך ש- $f(x_n)\xrightarrow[(n\to\infty)]{} M$ ונדע ש- $\{x_n\}$ חסומה אז לפי B.W יש לה תת סדרה מתכנסת

$\{x_{n_j}\}\xrightarrow[(j\to\infty)]{} x$ לכן מרציפות

$f(x_{n_j})\to f(x)$ [illegible]

איך גם $f(x_{n_j})\to M$ ולכן

כיוון שלסדרה יש רק גבול יחיד (סדרה מתכנסת לפי היינה לגבול של f סופי או אינסופי)

אז יש $x\in[a,b]$ כך

ש- $f(x)=M$ כלומר M מקסימום.

<u>סתירה</u> לטענה.

[כנ"ל לגבי מינימום]

לכן f מקבלת מינימום ומקסימום

ב- $[a,b]$. <u>מש"ל</u>

$\frac{25}{25}$

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

(א) $A\subseteq\mathbb{R}$ קבוצה קומפקטית אם לכל כיסוי פתוח
שלה $\{O_\alpha\}_{\alpha\in I}$ ניתן למצוא תת כיסוי
סופי.

$A\subseteq\mathbb{R}$ נקראת "קומפקטית סדרתית" אם לכל $\{x_n\}\subseteq A$
יש ל-$\{x_n\}$ ... כלומר אם לכל סדרה ב-A
יש תת סדרה מתכנסת לגבול ב-A

(ב) צ"ל: הגדרה של קומפקטית $\Longleftrightarrow$ של קומפקטית
סדרתית:

קל!

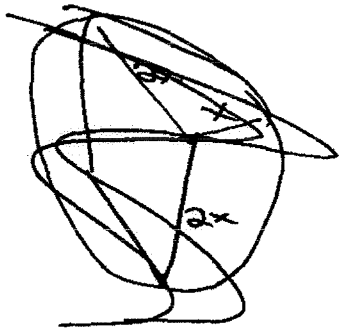
($\Leftarrow$) לפי משפט היינה בורל אם A קומפקטית
אז A סגורה וחסומה. נניח שהיא
חסומה. אז לפי B.W. בפרט לכל $\{x_n\}\subseteq A$
(ובפרט $\{x_n\}\subseteq A$ סדרה חסומה) יש תת סדרה מתכנסת
$\{x_{n_k}\}\to x$ (חסום) כיוון ש-A סגורה יש לה את כל נקודות הגבול
של כן הנקודות שלה ולכן $x\in A$
(x הוא גבול של סדרה ולכן בהכרח נק' הצטברות)
ולכן לפי ההגדרה A קומפקטית סדרתית

($\Rightarrow$) נניח A קומפקטית סדרתית ונראה שהיא סגורה
וחסומה. (ולפי היינה בורל קומפקטית)

<u>חסומה:</u> נסמן $b=\sup A$
נניח בשלילה כי $b=\infty$ אז
יש $\{x_n\}\to\infty$ ולפי הנתון
$\hat{A}$ (חסום)
צריך להיות לה תת סדרה מתכנסת לגבול ב-A ואין כזו
כי ... סדרה. [כל תת סדרה של סדרה מתכנסת, מתכנסת לאותו הגבול

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$$

ozi'c



$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - 2(1-\cos x)}{(1-\cos x)\,x^2}$$

$$\frac{x^2 + 2\cos x - 2}{x^2 - x^2\cos x}$$

$$\frac{x^2 + 2\left(1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^2)\right) - 2}{x^2 - x^2\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)}$$

$$\frac{\cancel{x^2} + \cancel{2} - \cancel{x^2} + o(x^2) - \cancel{2}}{\cancel{x^2} - \cancel{x^2} + o(x^2)}$$

$$\frac{x^2 + 2\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right) - 2}{x^2 - x^2\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right)}$$

$$\frac{\frac{x^4}{12} + o(x^4)}{\frac{x^4}{2} + o(x^4)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

<u>משפט</u> יהיה A חסומה וסגורה [כלומר באותו המרחב אינסופית]. ⇐ A <u>קומפקטית</u>.

<u>סגורה:</u> נניח $l \in A'$, $l \notin A$

אז יש $\{x_n\} \to l$
$\hat{A}$ (מסדרה)

ובגלל ש- A היא קומפקטית סדרתית

אז יש $\{x_{n_j}\} \to \xi \in A$

אבל אנחנו יודעים $\{x_{n_j}\} \to l \notin A$

וכיוון שלסדרה יש רק גבול יחיד

מכאן אז $\xi = l \in A$.

A <u>סגורה</u>.

כל הכבוד

<u>סוף</u> $\boxed{x}$

$\frac{20}{25}$

$\sigma_1 = 1 - \ln 1 = 1$

$\sigma_2 = \frac{3}{2} - \ln 2$

$f_{(-1)^+}$

$0 < x - \ln(1+x)$

$\frac{1+x-x}{(1+x)^2}$

$f_{(x)} = x - \ln(1+x)$

$f'_{(x)} = 1 - \frac{1}{1+x} > 0$

$f_{(-\frac{1}{2})}$

$\cancel{f_{(0)} = 0}$

$\frac{1+x-1}{1+x} = 0$

$f_{(x)}: \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$

$\log(1+x) - \frac{x}{x+1}$

$f'_{(x)} = \frac{1}{1+x} - \frac{1+x-x}{(1+x)^2}$

$\frac{+\log(1+x) + \log(1+x) - x}{x+1}$

$\frac{1+x-1}{(1+x)^2} = 0$

$x = 0$

$f'_{(x)} = \frac{x}{(1+x)^2}$

$f_{(0)} = l$

$\frac{(1+x)^2 - 2x(1+x)}{(1+x)^4}$

$\frac{1+2x+x^2-2x-2x^2}{(1+x)^4}$

$\frac{1-x^2}{(1+x)^4}$

חשב: (5)

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{1-\cos x}-\frac{2}{x^2}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2\cos x-2}{x^2-x^2\cos x}$$

נשתמש בפיתוח מקלורין [פיתוח Taylor סביב $x_0=0$]

לסדר $n=4$ עם שארית בצורת פיאנו:

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)\right)-2}{x^2-x^2\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x^2}+\cancel{2}-\cancel{x^2}+\frac{x^4}{12}+o(x^4)-\cancel{2}}{\cancel{x^2}-\cancel{x^2}+\frac{x^4}{2}+o(x^4)}=$$

(נחלק מונה ומכנה ב- x^4)

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{12}+\underset{\to 0}{o(1)}}{\frac{1}{2}+\underset{\to 0}{o(1)}}=\frac{2}{12}=\underline{\underline{\frac{1}{6}}}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{1-\cos x}-\frac{2}{x^2}\right)=\underline{\underline{\frac{1}{6}}}$$ לכן

$\frac{25}{25}$ ✓

המשך שאלה (6)

סעיף (ב):

עבור $x>0$ $f'(x)>0$

ולכן בקטע $(0,\infty)$

f עולה ממש

ובגלל ש- $f(0)=0$ אז

$f(x)>0$ לכל $x>0$.

עבור $-1<x<0$ $f'(x)<0$ $\left(\frac{x\,(<0)}{1+x\,(>0)}\right)$

ולכן f יורדת ממש

בקטע $(-1,0)$

ובגלל ש- $f(0)=0$ ו- f יורדת ממש

f מקבלת רק ערכים חיוביים

ב- $(-1,0)$ כלומר $f(x)>0$

לכל $-1<x<0$.

מש״ל (1)

$\frac{25}{25}$

6 צ"ל:

$\frac{x}{1+x} \overset{②}{<} \log(1+x) \overset{①}{<} x$ לכל $x>0$ ו- $-1<x<0$

נוכיח את ①:

נגדיר $f(x)=x-\log(1+x)$

אם נראה כי $f(x)>0$ לכל $x>0$ ו- $-1<x<0$

אז סיימנו.

$$f'(x)=1-\frac{1}{1+x}=\frac{1+x-1}{1+x}=\frac{x}{1+x}$$

[illegible]

$-o(t)^2$

$-\frac{1}{(1+t)^2}$ $\frac{1}{1+t}$

$t = x+1$

$t \to 1$

$t - \frac{t^2}{2!}$

$$\frac{(x+1)\ln(1+x) - x}{1+x}$$

$$\frac{t \cdot \ln(t) - t + 1}{t}$$

$$\frac{(t-1)\ln(t+1) - t + 2}{t-1}$$

$(t-1)$

$(t-1)t - t + 2$

$t^2 - 2t + 2 + o(t)$

נוכיח של ②

נגדיר $g(x) = \log(1+x) - \dfrac{x}{1+x}$

נוכיח $g(x) > 0$ לכל $x > 0$
$-1 < x < 0$

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1+x-x}{(1+x)^2} =$$

$$= \frac{1+x-1}{(1+x)^2} = \frac{x}{(1+x)^2}$$

~~$g'(x) = 0$ $x \neq 0$~~

~~$g''(x) = \left(\dfrac{x}{(1+x)^2}\right)' = \dfrac{(1+x)^2 \ldots}{(1+x)^4}$~~

~~$g'(0) = 1 > 0$~~

~~$x = 0$~~

~~$\lim_{x \to \infty} \log(1+x) - \dfrac{x}{1+x} = \infty$~~

~~$\lim_{x \to (-1)^+} \log(1+x) - \dfrac{x}{1+x} =$~~

~~$x = 0$~~

~~$(-1, 0)$ $(0, \infty)$~~

~~$x = 0$ $g(0) = 0$~~
~~$-1 < x < 0$~~

~~$g(x) > 0$~~

② ⑥ תשובה

עבור $x>0$ $\Leftarrow$ $f'(x)>0$

ולכן f עולה ממש

ב- $(0,\infty)$

ומכיוון ש- $f(0)=0$

נקבל לכל $x\in(0,\infty)$

$f(x)>0$.

עבור $-1<x<0$ $\Leftarrow$ $f'(x)<0$

ולכן f יורדת ממש

ב- $(-1,0)$

וכיוון ש- $f(0)=0$

נקבל לכל $-1<x<0$

$f(x)>0$.

מ.ש.ל

ב

לפני התחלת הבחינה מלא את כל הפרטים הבאים בכתב ברור וקרא בעי

תאריך הבחינה 28/2/05

שם הקורס [illegible] 1

שם המורה [illegible] מרן

החוג/המגמה [illegible]

מס' זהות

לשימוש המורה הבוחן:

הציון 100

המחברת נבדקה ביום 7.3.2005

חתימת המורה [illegible]

1. 25 הנך נדרש לשמור על טוהר הב
ולהישמע להוראות המשגיחים ו
להעתיק, אין לדבר ואין להעב

נבחן הנוהג בניגוד להוראות ולהעמדה לדין משמעתי.

2. על הנבחן להבחן בחדר שבו הו

3. אין להחזיק **טלפונים ניידים** או א
אלקטרוניים כלשהם בזמן הבחי
כל חפציו האישיים בצד החדו

4. 25 אין להחזיק בהישג יד, בחדר ה
חומר הקשור לבחינה או לקורס
בו הותר בכתב על ידי המורה.

5. 25 קריאת השאלון מותרת רק לאחו

6. 25 נבחן לא יעזוב את מקומו ולא
סיים את הבחינה ללא קבלת רש
מן החדר,יפקיד הנבחן את מו
(טופס הבחינה) בידי המשגיח

7. נבחן שנכנס לחדר הבחינה וק
יהא רשאי לעזוב אותו אלא כעבוו
תחילתה ורק לאחר שיחזיר למ
השאלון, ויקבל ממנו את התע
עם כניסתו לכיתה. נבחן שהח
הבחינה ייחשב כמי שנבחן בנ

8. אין לכתוב את השם או כל
המחברת. פרטי הנבחן ימולאו ע
המיועד לכך בלבד.

9. אין לתלוש דפים מהמחברת. טיו
בלבד. אין להשתמש בדפים ש

10. יש לכתוב את התשובות בעט

F-75

מבחן בחדו"א 1

מרצה: פאול בירן

25.2.2005
מועד ב', סמסטר א'
תשס"ה

* משך הבחינה: 3½ שעות (ללא הארכת זמן).
* חומר סגור, למעט מחשבון.
* יש לפתור שאלה אחת מחלק א', ושלוש שאלות מחלק ב' (אין לבחור סעיפים משאלות שונות).

בהצלחה!!!

חלק א'

יש לפתור של שאלה אחת מבין שתי השאלות הבאות:

1. (25 נק') הוכח/י את המשפט הבא של Lagrange:
תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונק' רציפה ב-$[a,b]$ וגזירה ב-(a,b).
אזי קיים $c\in(a,b)$ כך ש-$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$.

(הדרכה: ניתן להשתמש במשפט Rolle מבלי להוכיחו).

2. (25 נק') הוכח/י את המשפט הבא של Cantor:
תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונק' רציפה בקטע (הסגור והסופי) $[a,b]$
אזי f רציפה ב-$[a,b]$ במידה שווה.

חלק ב'

יש לפתור של שלוש מבין ארבע השאלות הבאות:

3. (סה"כ 25 נק')
א. (10 נק') נתונים $\mathbb{R}\ni a,b>0$. חשב/י $\lim_{n\to\infty}(a^n+b^n)^{1/n}$.
ב. (15 נק') תהי $\{a_n\}$ סדרה חסומה המקיימת $a_n>0$ לכל n.
נתון ש-$\lim_{n\to\infty}a_na_{n+1}=1$. הוכח/י ש-$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,a_n\ge 1$.

4. (25 נק'). תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ נתונה ע"י $f(x) = x - 2\arctan x$.

חקרי את הפונק' f לפי הנקודות הבאות:

א. (5 נק'). תחומי עליה/ירידה, מקס./מינ. מקומיים וגלובליים.

ב. (5 נק'). תחומי קמירות מעלה/מטה, נק. פיתול.

ג. (5 נק'). אסימפטוטות.

ד. (10 נק'). שרטטי גרף של $y=f(x)$.

5. (סה"כ 25 נק'). תהי $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ פונק' גזירה.

א. (15 נק'). נניח שקיים $K>0$ כך ש- $f'(x)\geq K$ לכל $x\in[a,\infty)$. 15
הוכיחי ש- $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$.

ב. (10 נק'). נניח שנתון רק ש- $f'(x)>0$ לכל $x\in[a,\infty)$. 10
האם עדיין נכון ש- $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$? אם כן, הוכיחי. אם לא, הביאי דוגמא נגדית.

6. (סה"כ 25 נק').

א. (15 נק'). תהיינה $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונק' גזירות.
נתון שלכל $x\in\mathbb{R}$, $|f'(x)|\leq|g'(x)|$.
נניח ש- g רציפה במ"ש ב- $\mathbb{R}$. הוכיחי שגם f רציפה במ"ש ב- $\mathbb{R}$. 15

ב. (10 נק'). חשבי את הגבול $\lim_{x\to\infty} x\left(\arctan x-\frac{\pi}{2}\right)$. 10

בהצלחה!!!

חלק ג

1) אם $f:[a,b]$ רציפה ב- $[a,b]$ וגזירה ב-(a,b).

צ.ל: - קיים $c\in(a,b)$ כך ש-

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$$

הוכחה:

⇐ נעביר קו ישר (מיתר) בין הנקודות $(a,f(a))$ לבין $(b,f(b))$. נסמן הביטוי של ישר שמשוואתו הוא $y=ax+b$. נסמן ישר זה: הפונקציה $l(x)$. עפ"י הגדרת הנקודה לינארית נוכל לכתוב את הפונקציה כך:

$$l(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$$

⇐ נגדיר פונקציית הפרשים $D(x)$:

$$D(x)=f(x)-l(x)$$

$$D(x)=f(x)-\frac{(f(b)-f(a))}{b-a}(x-a)-f(a)$$

⇐ נראה שעבור $D(x)$ שווים 0 - $x=b$ ו- $x=a$:

$$D(a)=f(a)-\frac{(f(b)-f(a))}{b-a}\underbrace{(a-a)}_{0}-f(a)$$

$$=f(a)-f(a)=\underline{0}$$

$$D(b)=f(b)-\frac{1\cdot(f(b)-f(a))}{\cancel{b-a}}\cancel{(b-a)}-f(a)$$

$$=f(b)-f(b)+f(a)-f(a)=\underline{0}$$

(המשך שאלה 1 !)

⇐ הפונקציה $D(x)$ הינה פונקציה רציפה בקטע $x\in[a,b]$ שכן היא הרכבה של פונקציות רציפות לגמרי זה ($f(x)$ עפ"י נתון ו-$l(x)$ הינה פונקציה ליניארית) ולכן גם רציפה ב-$[a,b]$. (**)

⇐ הפונקציה $D(x)$ הינה פונקציה גזירה לכל $x\in(a,b)$ שכן היא הרכבה של פונקציות גזירות לגמרי זה ($f(x)$ עפ"י נתון, $l(x)$ הינה פונקציה ליניארית) ולכן גזירה ב-(a,b). (***)

⇐ עפ"י (*), (**), (***) לעיל, ניתן להפעיל את משפט Rolle על $D(x)$, ולכן $\exists\, c^*\in(a,b)$ שמקיים את הטענה שנגזרת הפונקציה מתאפסת $D'(c^*)=0$. ולכן:

$$D'(x) = f'(x) - \frac{(f(b)-f(a))}{b-a}$$

עפ"י הגדרת הנגזרה

$$D'(c^*) = f'(c^*) - \frac{(f(b)-f(a))}{b-a} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$f'(c^*) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$\Downarrow$$

$$f(b)-f(a) = f'(c^*)(b-a)$$

ולכן בה-c^* הוא אותו c שציינו מהמשפט $\Downarrow$ מ.ש.ל

$$f(b)-f(a) = f'(c)(b-a)$$

$f(x) = x - 2\arctan x$ (+) (4)

(א) תחום רק (בתוך תחום הגדרה ורציפות):-
כיוון שמדובר בפונקציה, $\arctan x$ הינה פונקציה המוגדרת לכל x, והינה רציפה לכל x. לכן $f(x)$ הינה הרכבה של פונקציות המוגדרות והרציפות לכל x (הפונקציה השניה ב- $f(x)$, היא x, הינה פונקציה לינארית הינה גם כן פונקציה המוגדרת לכל x, והרציפה לכל $x \in \mathbb{R}$.

(ב) למציאת תחומי עליה וירידה עלינו לגזור את הפונקציה. $f(x)$ גזירה לכל x מכיוון היא הרכבה של פונקציות גזירות ($\arctan x$ גזירה כפי שראינו בכיתה, x הינה פונקציה לינארית ולכן גם גזירה):-

$$f'(x) = 1 - 2 \cdot \frac{1}{1+x^2}$$

מתי ש- $f(x)$ עולה ($f'(x)$ $\boxed{\text{חיובית}}$) ולהפך:-

$$1 - \frac{2}{1+x^2} > 0 \Rightarrow \frac{2}{1+x^2} < 1 \Rightarrow$$

$$2 < 1 + x^2 \Rightarrow 1 < x^2$$

$$\boxed{x < -1 \text{ או } 1 < x}$$

הפונקציה $\boxed{\text{יורדת}}$ ב:- $\boxed{-1 < x < 1}$

(ג) מקס' ומינ' - $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

~~רציפה בהמשך!~~ האם מינימום/מקסימום

(ד) לפונקציה יש מספר שורשים (3) [illegible]
גבולות הפונקציה באינסוף, [illegible]
[illegible]

ב) ⇐ תחומי קמירות ~~[illegible]~~, לפי נגזרת שנייה.
מותר לגזור פעם נוספת שכן $f'(x)$ הינה
הרכבה של פונקציות גזירות (לפי שאלה כבר).
(המכנה ב- $f'(x) \neq 0$ לכל x ~~[illegible]~~, $1+x^2 \neq 0$ שונה מ-0
ולכן -

לכל x $1+x^2 \neq 0$ כי הוא (נכון)

$$f''(x) = \frac{+2\cdot(2x)}{(1+x^2)^2}$$

מתי ש- $f''(x)>0$ הפונקציה קמורה מעלה!-

$$\frac{4x}{(1+x^2)^2} > 0$$

מכנה תמיד חיובי

ולכן $f''(x)>0$ לכל $x>0$
$f''(x)<0$ לכל $x<0$

ולכן - $f(x)$ קמורה מעלה לכל $x>0$
$f(x)$ קמורה מטה לכל $x<0$

⇐ נובע - קיימת נקודת פיתול $x=0$
(נגזרת שנייה שווה ל-0 ב-$x=0$, וכן
משנה הקמירות בנקודה זו כמובן).

ג) ⇐ אסימפטוטות:-

⇐ אנכיות - אין! שכן הפונקציה מוגדרת לכל x
ולכן לא יתכן: ~~[illegible]~~

⇐ אופקיות / נטויות (אם קיים a ו- b סופיים
זו ההגדרה! לפיכך, קיימת אסימפטוטה!):-

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x - 2\arctan x}{x} = \lim_{x\to\infty} 1 - \frac{2\arctan x}{x} = 1$$

$\frac{\pi}{2}$, ∞, 0

המשך בעמוד הבא! ⟵

המשך שאלה 4 - ג - מציאת אסימפטוטות משופעות :-

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-ax)=\lim_{x\to\infty} x-2\arctan x-x$$

$$=\lim_{x\to\infty}-2\arctan x=-2\cdot\frac{\pi}{2}=\underline{\underline{-\pi}}$$

ונבדוק כאשר $x\to-\infty$:-

$$a=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-2\arctan x}{x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}1-\frac{2\arctan x}{x}=1$$

$$2\arctan x\to-\pi,\quad x\to-\infty,\quad \frac{2\arctan x}{x}\to 0$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-ax)=\lim_{x\to-\infty} x-2\arctan x-x$$

$$=\lim_{x\to\infty}-2\arctan x=-2\cdot(-1)\frac{\pi}{2}=\underline{\underline{\pi}}$$

$y=x-\pi \Leftarrow x\to\infty$ אסימפטוטה ל

$y=x+\pi \Leftarrow x\to-\infty$ אסימפטוטה ל

<u>טבלה של הסיכום -</u>

לפי, מלומר!

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,\infty)$
$f(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	min	$\nearrow$
$f'(x)$	+++	0	---	---	---	0	+++
$f''(x)$	---	---	---	0	+++	+++	+++
קמירות/קעירות	$\frown$		$\frown$	נקודת פיתול	$\smile$		$\smile$

3) ב) כדאי לבדוק איך הפונקציה מתנהגת $f(x)$ ב-$\pm\infty$
על מנת לקבל הערכה - מינ / מקס מוחלט / מקומי!

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)) = \lim_{x\to\infty} x - 2\arctan x = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)) = \lim_{x\to-\infty} x - 2\arctan x = -\infty$$

ולכן המינ והמקס מקומיים!

(ולא מוחלטים)

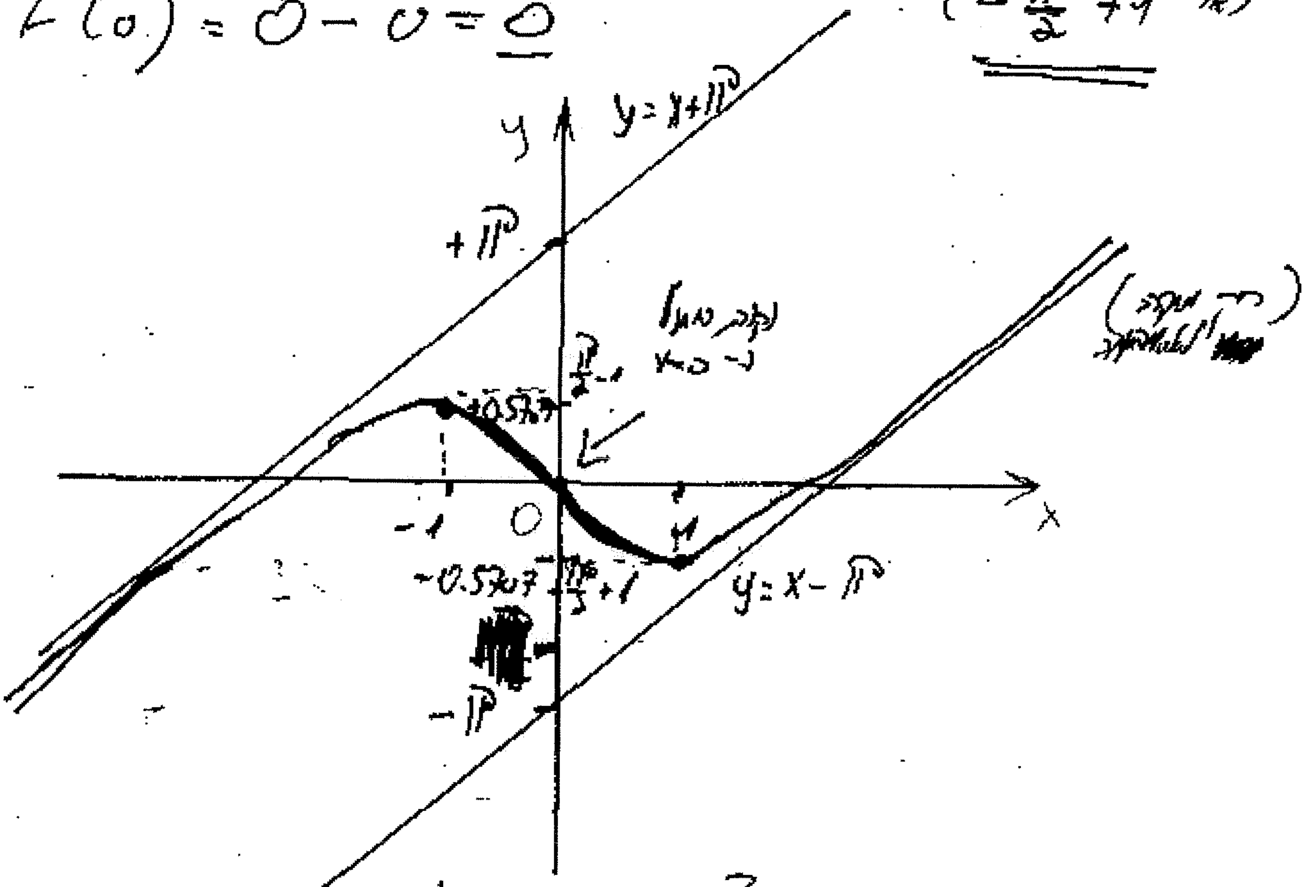
$f(-1) = -1 - 2\arctan(-1) =$

$-1+1.5707 = 0.5707$

$f(1) = 1 - 2\arctan(1) = 1 - 1.5707 = -0.5707$

$\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$ $\left(-\frac{\pi}{2} + 1\right)$

$f(0) = 0 - 0 = \underline{0}$



(5) קיים $k>0$ כך ש- $f'(x)\ge k$ לכל $x\in[a,\infty)$. הוכ׳: $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$

אבל דרוש מ-(ב)!

(ב) לא, דוגמה נגדית:

נשים לב - $-\frac{1}{x}$ לא מוגדרת ב-$x=0$, אבל הנה דוגמה שעונה קצת...

$f(x) = -\frac{1}{x}$

(נראה כי מתקיים הנתון:)

$f'(x)=\frac{1}{x^2}>0$

הנגזרת תמיד גדולה מ-0, רק שלא תמיד יותר גדולה מ-... $x\in[a,\infty)$ ...

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} -\frac{1}{x} = 0$

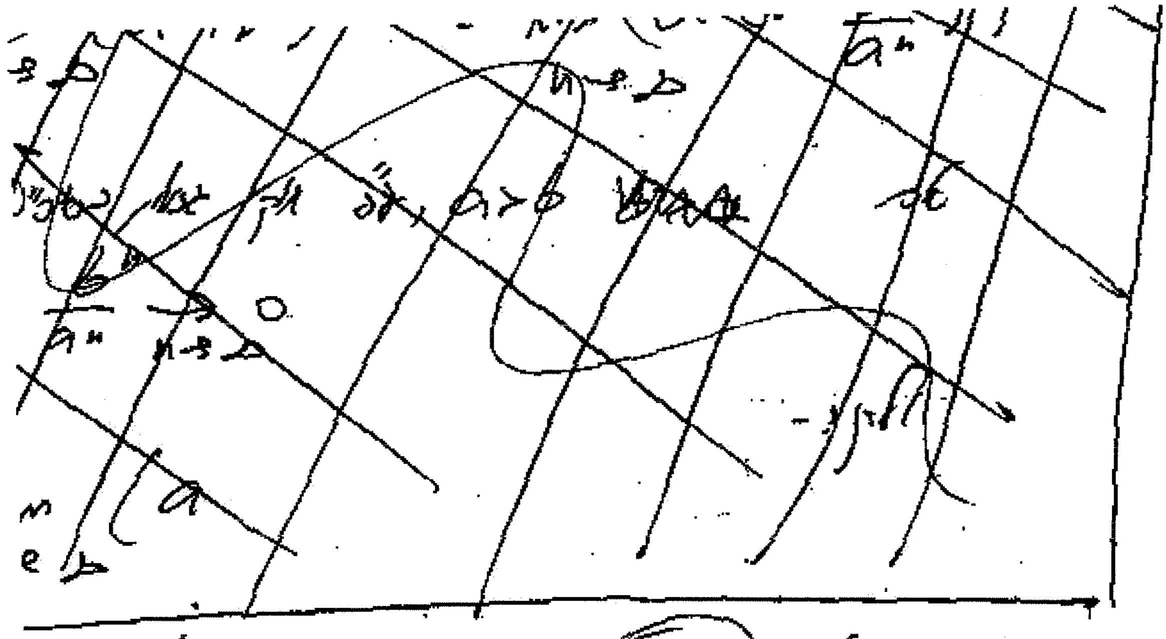
(א) [illegible]

(⇐) נשתמש במשפט לגרנז' על הקטע $[a,x]$, כך ש- $x\in[a,\infty)$ ונקבל - (מתקיים כי הפונקציה גזירה ורציפה ב-$[a,x]$)

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(c) \Rightarrow f(x)=f(a)+f'(c)(x-a), \quad a<c<x$$

$$\ge f(a)+k\cdot(x-a) \Rightarrow \lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$$

$k\le f'(x)$ [illegible]



עשינו את G במקום - כאן בפנים

הבנתם!!!

(גישה של - המשך הבא הוא
המשך של G, ורק במשך
אחרי מפגש שלה G עם הגולם
G. דרך לומר למשה שבו עוד אחרי זה
לאחר שקיבלו את גילוי G)

אינפי 1 ראשון שאלה 6 א !!!

⇐ לפי משפט קושי -

$$\frac{|f'(x)|}{|g'(x)|}=\frac{|f(x_2)-f(x_1)|}{|g(x_2)-g(x_1)|}$$

$\frac{15}{25}$

כך ש- $g'(x)\neq 0$, $x_1<x<x_2$.

לכן עפ"י ההוכחה בחלק א' ... -

$$\frac{|f'(x)|}{|g'(x)|}=\frac{|f(x'')-f(x')|}{|g(x'')-g(x')|}<1$$

(שכן נתון $f'(x)<g'(x)$ לכל x, ולכן זה ...
אם נתון ש- $x'<x<x''$)

⇐ מאידך, ... ! ... נתון
להסיק כי -

$$\frac{|f(x'')-f(x')|}{|g(x'')-g(x')|}>1$$

(כי $|f(x'')-f(x')|\geq\varepsilon_0$! $|g(x'')-g(x')|<\varepsilon_0$).

ולכן קיבלנו סתירה
מ.ש.ל.
ו- $f(x)$ רציפה במ"ש

מדוע ש- $|f'(x)|\leq|g'(x)|$ לא וכן ש-
ממש
$g'(x)=0$.

הופיע בשאלה במועד הקודם!

ו

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\arctan x-\frac{\pi}{2}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\arctan x-\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}}$$

ד

כאשר במכנה ובמונה שניהם שואפים ל-0 הפונקציות נגזרות במכנה אינה שונה מ-0. ניתן לופיטל - אם אין נקודה שבה הנגזרות הן מספר אם - לא כלל סתם מפשטים!

$\frac{10}{20}$

$$\overset{L}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}-\frac{x^2}{1+x^2}$$

מחלק במעלה הגבוהה

$$=\lim_{x\to\infty}-\frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+\frac{x^2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}-\frac{1}{\frac{1}{x^2}+1}=\boxed{-1}$$

ד

במונה: $|f'(x)|<|g'(x)|$, לפי משפט לגרנז'.

ה

לא רבמ"ש

נניח בשלילה ש- $f(x)$ לא רציפה במ"ש.

(כמו קודם) אם כך:

$\exists\varepsilon>0.\ \forall\delta>0.\ \exists x'',x'\in\mathbb{R}.\ |x''-x'|<\delta$

(*) וגם $|f(x'')-f(x')|\ge\varepsilon$

קיים ε - לפחות קיים אחד כזה, נסמנו ε_0.

אם ניקח את הסדרות x_n'', x_n' שהפרשן מתכנס ל-0 נניח $x_n''=n+\frac{1}{n}$, $x_n'=n$ נוכל למצוא x_n', x_n'' לכל δ שבהם מתקיים $|x_n''-x_n'|<\delta$ ועדיין $|f(x_n'')-f(x_n')|\ge\varepsilon_0$.

(**) [illegible]

המשך שאלה (6) סע' ו-

(ז) לא במ"ש. [illegible] כי [illegible] של x.

לכן -

[illegible]

קיים $\varepsilon_0>0$ ש.ט. לכל $\delta>0$ x', x'' - $|x''-x'|<\delta \Rightarrow$

$|f(x'')-f(x')| \ge \varepsilon_0$

מכיוון שהנתון נכון לכל $\delta>0$, וניקח את δ_0 שלקחנו מקודם [illegible] בכל הקודם.

~~[illegible] x'', x' כך ש- $|x''-x'|<\delta$ [illegible] לכן [illegible] לקחת את x''_n, x'_n שמצאנו מקודם. לכן ניתן לאמר:~~

~~$|f(x''_n)-f(x'_n)|<\varepsilon_0$~~

מכיוון שבסעיף הקודם לכל δ שהוא מצאנו x''_n, x'_n כך ש- $|x''_n-x'_n|<\delta$, נשתמש באותם x''_n, x'_n שמצאנו לגבי f - [illegible] לגבי (ג) g-

$|x''_n-x'_n|<\delta \Rightarrow |g(x''_n)-g(x'_n)|<\varepsilon_0$

[illegible] של [illegible]

(ח) מה נותן נתוני- $|f'(x)|<|g'(x)|$

$\Leftrightarrow \frac{|f'(x)|}{|g'(x)|}<1$

~~[illegible]~~

(ט) ראה המשך בעמוד הבא

בכל הכבוד את שאלה (6) !!!