89-198 מתמטיקה בדידה – תרגול 12

קומבינטוריקה

<u>בחירה ללא חזרות ובלי חשיבות לסדר</u>

בחירת k אברים מתוך n אברים ללא חזרות ובלי חשיבות לסדר למעשה מגדירה תת קבוצה מעוצמה k.

<u>משפט</u>: תהי A קבוצה, $|A| = n$, ויהי $0 \le k \le n$.
מספר האפשרויות לבחור k אברים מ A ללא חזרות ובלי חשיבות לסדר הוא $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.
למעשה מספר הסדרות מאורך k שבהן כל אבר מופיע לכל היותר פעם אחת הוא $\frac{n!}{(n-k)!}$, ולכל סדרה מאורך k יש $k!$ פרמוטציות (שנחשבות לאותה הבחירה כי אין חשיבות לסדר), לכן נקבל $\frac{n!}{k!(n-k)!}$.

<u>דוגמה</u>: בטופס לוטו צריך לנחש 6 מספרים מתוך 37, ובנוסף מספר חזק מתוך 7.
כמה אפשרויות יש למלא טופס לוטו?
<u>פתרון</u>: נחשב תחילה את מספר האפשרויות לבחור 6 מספרים מתוך 37, כלומר $k = 6$ ו $n = 37$.
לכן מספר האפשרויות הוא $\binom{n}{k} = \binom{37}{6} = \frac{37!}{6!31!} = \frac{37\cdot36\cdot35\cdot34\cdot33\cdot32}{720} = 2{,}324{,}784$.
כעת מעקרון הכפל נקבל שמספר האפשרויות למילוי טופס לוטו הוא $2{,}324{,}784 \cdot 7 = 16{,}273{,}488$.

<u>הערה</u>: אפשר לחשוב על אברי הקבוצה A כתאים, כלומר שיש n תאים, ובנוסף יש לנו k כדורים זהים.
כעת אנחנו יכולים בכל תא לשים כדור אחד (אם יש כדור בתא i זה אומר שבחרנו את a_i).

<u>תרגיל</u>: בתחנת משטרה משרתים 10 שוטרים. מפקד התחנה החליט ש 5 מהם יסיירו ברחובות, 2 יאיישו את התחנה ו 3 יימצאו בכוננות. בכמה אופנים שונים אפשר לחלק את 10 השוטרים ל 3 קבוצות?
<u>פתרון</u>: לסיור בוחרים 5 מתוך 10 (ללא חזרות ללא חשיבות לסדר), לאיוש התחנה בוחרים 2 מתוך 5, ולכוננות בוחרים 3 מתוך 3:

$$\binom{10}{5}\binom{5}{2}\binom{3}{3} = \frac{10!}{5!\cdot5!}\cdot\frac{5!}{2!\cdot3!}\cdot1 = \frac{10!}{5!\cdot3!\cdot2!} = \frac{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6}{6\cdot2} = 5\cdot9\cdot8\cdot7 = 2520$$

<u>בחירה עם חזרות ובלי חשיבות לסדר</u>

מולטי-קבוצה היא הכללה של המושג קבוצה. במולטי-קבוצה אבר יכול להופיע מספר פעמים.
בחירת k אברים מתוך n אברים עם חזרות ובלי חשיבות לסדר למעשה מגדירה מולטי-קבוצה מעוצמה k.
שוב ניתן לחשוב על אברי הקבוצה A כתאים, כלומר שיש n תאים, ובנוסף יש לנו k כדורים זהים.
כעת בכל תא אפשר לשים יותר מכדור אחד (כלומר לבחור אבר יותר מפעם אחת).
במילים אחרות זה מספר האפשרויות לפזר k כדורים זהים ל n תאים.

<u>משפט</u>: תהי A קבוצה, $|A| = n$, ויהי $k \in \mathbb{N}$.
מספר האפשרויות לבחור k אברים מ A עם חזרות ובלי חשיבות לסדר הוא $\binom{n+k-1}{n-1}$.

<u>הערה</u>: $\binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!(n+k-1-(n-1))!} = \binom{n+k-1}{n-1}$.

<u>תרגיל</u>:

א. כמה פתרונות טבעיים יש למשוואה $x_1 + x_2 + \cdots + x_7 = 30$?

ב. כמה פתרונות טבעיים יש למשוואה $x_1 + x_2 + \cdots + x_7 = 30$ כאשר $2 \le x_2$?

ג. כמה פתרונות טבעיים יש למשוואה $x_1 + x_2 + \cdots + x_7 = 30$ כאשר $2 \le x_2 \le 10$?

ד. כמה פתרונות טבעיים יש לאי השיוויון $x_1 + x_2 + \cdots + x_7 < 30$?

<u>פתרון</u>:

א. ניתן להסתכל על השאלה כעל פיזור 30 אחדים ב 7 משתנים.
זה שקול לפיזור 30 כדורים זהים ב 7 תאים, כלומר $n = 7$, $k = 30$ ונקבל $\binom{36}{30} = \binom{7+30-1}{30} = \binom{n+k-1}{k}$.

ב. זה שקול לפיזור 30 כדורים זהים ב 7 תאים, כאשר בתא 2 יהיו לפחות שני כדורים.
כלומר זה כמו לפזר 28 כדורים זהים ב 7 תאים, $\binom{34}{28} = \binom{7+28-1}{28}$.

ג. נחסיר מסעיף ב' את מספר האפשרויות לפיזור 30 כדורים זהים ב 7 תאים כאשר בתא 2 יהיו לפחות 11 כדורים. נקבל $\binom{34}{28} - \binom{7+19-1}{19} = \binom{34}{28} - \binom{25}{19}$.

ד. נסמן את קבוצת הפתרונות הטבעיים של אי השיוויון על ידי $\mathrm{A} = \left\{(x_1, \dots, x_7) \in \mathbb{N}^7 \mid \sum_{i=1}^{7} x_i < 30\right\}$

מכיון שאנו עובדים מעל הטבעיים ניתן להסתכל על אי השיוויון החלש $x_1 + x_2 + \cdots + x_7 \le 29$.

נמיר את אי השיוויון למשוואה מכיון שאנו יודעים לספור את מספר הפתרונות עבור משוואות.

לשם כך נוסיף משתנה y, וכעת נסתכל על המשוואה $x_1 + x_2 + \cdots + x_7 + y = 29$.

נסמן את קבוצת הפתרונות הטבעיים, $B = \left\{(x_1, \dots, x_7, y) \in \mathbb{N}^8 \mid \sum_{i=1}^{7} x_i + y = 29\right\}$.

זה שקול לפיזור 29 כדורים ב 8 תאים, ולכן $|B| = \binom{8+29-1}{29} = \binom{36}{29}$.

כעת נגדיר פונקציה $f: A \to B$ על ידי $f\big((x_1, \dots, x_7)\big) = \left(x_1, \dots, x_7, 29 - \sum_{i=1}^{7} x_i\right)$, נראה ש f חח"ע ועל.

תחילה נשים לב ש f אכן מוגדרת היטב:

לכל $(x_1, \dots, x_7) \in A$, מתקיים $\sum_{i=1}^{7} x_i \le 29$ לכן $29 - \sum_{i=1}^{7} x_i \in \mathbb{N}$, לכן $\left(x_1, \dots, x_7, 29 - \sum_{i=1}^{7} x_i\right) \in B$.

<u>חח"ע</u>: יהיו $(x_1, \dots, x_7), (z_1, \dots, z_7) \in A$ ונניח ש $(x_1, \dots, x_7) \ne (z_1, \dots, z_7)$,

אזי $\left(x_1, \dots, x_7, 29 - \sum_{i=1}^{7} x_i\right) \ne \left(z_1, \dots, z_7, 29 - \sum_{i=1}^{7} z_i\right)$, כלומר $f\big((x_1, \dots, x_7)\big) \ne f\big((z_1, \dots, z_7)\big)$.

<u>על</u>: יהי $(x_1, \dots, x_7, y) \in B$, אזי $\sum_{i=1}^{7} x_i + y = 29$, כלומר $\sum_{i=1}^{7} x_i = 29 - y < 30$,

לכן $(x_1, \dots, x_7) \in A$ ומתקיים $f\big((x_1, \dots, x_7)\big) = \left(x_1, \dots, x_7, 29 - \sum_{i=1}^{7} x_i\right) = (x_1, \dots, x_7, y)$.

נובע מכך שמספר הפתרונות לאי השיוויון הוא $|A| = |B| = \binom{36}{29}$.

<u>סיכום הנוסחאת לבחירת k מתוך n</u>

תהי A קבוצה מעוצמה n.

	עם חזרות ($k \in \mathbb{N}$)	**ללא חזרות ($0 \le k \le n$)**
עם חשיבות לסדר	מספר הפונקציות $f: \{1, \dots, k\} \to A$ n^k	מספר הפונקציות החח"ע $f: \{1, \dots, k\} \to A$ $\frac{n!}{(n-k)!}$
בלי חשיבות לסדר	מספר המולטי-קבוצות מגודל k המוכלות ב A $\binom{n+k-1}{n-1}$	מספר תתי הקבוצות של A מגודל k $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$

הוכחות קומבינטוריות

נוסחת הבינום של ניוטון: יהיו $a,b \in \mathbb{R}$ ויהי $n \in \mathbb{N}$. אזי

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

מסקנה: יהי $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$.

הוכחה אלגברית:

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

הוכחה קומבינטורית: תהי A קבוצה מעוצמה n.

מצד אחד מספר תתי הקבוצות של A הוא 2^n.

מצד שני, לכל $0 \le k \le n$ מספר תתי הקבוצות של A מעוצמה k הוא $\binom{n}{k}$.

לכן מספר תתי הקבוצות של A הוא $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$.

תרגיל: יהי $n \in \mathbb{N}$. הוכח ש $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}$.

הוכחה אלגברית: מהגדרת המקדמים הבינומיים נקבל שעבור $0 < k \le n$

$$k\binom{n}{k} = k\frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \frac{n(n-1)!}{(n-k)!\,(k-1)!} = n\frac{(n-1)!}{\big(n-1-(k-1)\big)!\,(k-1)!} = n\binom{n-1}{k-1}$$

ולכן

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} \overset{\text{נסמן } i=k-1}{=} n\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i} \overset{\text{מהמסקנה הקודמת}}{=} n \cdot 2^{n-1}$$

הוכחה קומבינטורית: תהי A קבוצה מעוצמה n.

תהי $B \subseteq A$ תת קבוצה לא ריקה, נבחר $b \in B$, ונסתכל על הזוג הסדור (B,b).

נבדוק בכמה דרכים שונות ניתן לבנות זוגות סדורים כאלו.

- דרך 1: קודם נבחר תת קבוצה לא ריקה, ולאחר מכן נבחר אבר מתוכה.
  יהי $0 < k \le n$. מספר תתי הקבוצות של A מעוצמה k הוא $\binom{n}{k}$.
  בכל תת קבוצה כזו יש k אפשרויות לבחור אבר.
  לכן נקבל $k\binom{n}{k}$ זוגות סדורים עבור תתי קבוצות מעוצמה k.
  סה"כ נקבל $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$ זוגות סדורים.
- דרך 2: קודם נבחר אבר מ A ולאחר מכן נוסיף לו אברים נוספים על מנת ליצור תת קבוצה לא ריקה.
  יש n אפשרויות לבחור אבר $a \in A$.
  כעת נותרו $n-1$ אברים ב $A \setminus \{a\}$, ויש 2^{n-1} אפשרויות להגדיר תת קבוצה $X \subseteq A \setminus \{a\}$.
  כל בחירה כזו מגדירה את הזוג הסדור $(X \cup \{a\}, a)$
  סה"כ נקבל $n \cdot 2^{n-1}$ זוגות סדורים.

<u>עקרון ההכלה וההפרדה</u>: (זו למעשה הכללה של עקרון החיבור לקבוצות שאינן בהכרח זרות)

תהיינה A,B קבוצות סופיות. אזי $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

עבור 3 קבוצות סופיות A,B,C מתקיים

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

<u>תרגיל</u>: כמה מספרים טבעיים בין 1 ל 1000 מתחלקים ללא שארית בלפחות אחד מהמספרים 2,3,5?

<u>פתרון</u>: נסמן $A = \{1, \dots, 1000\}$ ונגדיר את הקבוצות הבאות:

$$A_2 = \{n \in A : 2 \mid n\}, A_3 = \{n \in A : 3 \mid n\}, A_5 = \{n \in A : 5 \mid n\}$$

אנו מחפשים את $|A_2 \cup A_3 \cup A_5|$.

נשים לב ש $|A_2| = \left\lfloor \frac{1000}{2} \right\rfloor = 500, |A_3| = \left\lfloor \frac{1000}{3} \right\rfloor = 333, |A_5| = \left\lfloor \frac{1000}{5} \right\rfloor = 200$.

בנוסף $|A_2 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{1000}{6} \right\rfloor = 166, |A_2 \cap A_5| = \left\lfloor \frac{1000}{10} \right\rfloor = 100, |A_3 \cap A_5| = \left\lfloor \frac{1000}{15} \right\rfloor = 66$,

ו $|A_2 \cap A_3 \cap A_5| = \left\lfloor \frac{1000}{30} \right\rfloor = 33$.

לפי עיקרון ההכלה וההפרדה נקבל

$$|A_2 \cup A_3 \cup A_5| = (500 + 333 + 200) - (166 + 100 + 66) + 33 = 734$$

<u>תרגיל</u>: בכמה דרכים ניתן לפזר 60 כדורים זהים ל 3 תאים כך שבאף תא לא יהיו יותר מ 24 כדורים?

<u>פתרון</u>: נסמן ב A את קבוצת כל הדרכים לפזר 60 כדורים זהים ל 3 תאים. אזי $|A| = \binom{3+60-1}{60} = \binom{62}{60}$.

לכל $i \in \{1,2,3\}$ נסמן ב A_i את קבוצת הדרכים לפזר 60 כדורים ל 3 תאים כך שבתא i יש יותר מ 24 כדורים.

פתרון השאלה הוא $|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}|$.

מדה מורגן נקבל ש $\overline{\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}} = A_1 \cup A_2 \cup A_3$.

לכן $A = (\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}) \cup (A_1 \cup A_2 \cup A_3)$ ובנוסף אלו קבוצות זרות.

מעיקרון החיבור $|A| = |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| + |A_1 \cup A_2 \cup A_3|$, ולכן

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| = |A| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3|$$

מעקרון ההכלה וההפרדה נקבל ש

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

- לכל $i \in \{1,2,3\}$ נסתכל על A_i.
  נפזר בתא i 25 כדורים, כעת נותר לפזר 35 כדורים ב 3 תאים, לכן $|A_i| = \binom{3+35-1}{35} = \binom{37}{35}$.
- לכל $i,j \in \{1,2,3\}$ שונים נסתכל על $A_i \cap A_j$, נפזר 25 כדורים בתא i ו 25 כדורים בתא j,
  נותר לפזר 10 כדורים ב 3 תאים ונקבל ש $|A_i \cap A_j| = \binom{3+10-1}{10} = \binom{12}{10}$.
- בנוסף $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \emptyset$ מכיון שאין 75 כדורים.

לכן

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| = \binom{62}{60} - \left(3\binom{37}{35} - 3\binom{12}{10} + 0\right) = \frac{62 \cdot 61}{2} - 3\left(\frac{37 \cdot 36}{2} - \frac{12 \cdot 11}{2}\right)$$
$$= 31 \cdot 61 - 3(37 \cdot 18 - 6 \cdot 11) = 1891 - 3(666 - 66) = 1891 - 1800 = 91$$

<u>תרגיל (מועד א' תשע"ד)</u>

א) $2n$ חברים נסעו לטיול והחליטו לשכור n אופנועים זהים. על כל אופנוע יסעו שני חברים בדיוק.
לכל אחד מהחברים יש רשיון לנהיגה באופנוע. בכמה דרכים יכולים החברים להתחלק בין האופנועים?
(שימו לב שחלוקה בה טל נוהג באופנוע ודני יושב מאחוריו שונה מחלוקה בה דני נוהג וטל יושב מאחוריו.)
רמז: עבור $2n=6$ התשובה היא 120.

ב) אותה הבעיה מסעיף א', אבל כעת כל אחד מ-n האופנועים שונה מכל אופנוע אחר.
סידור בו טל ודני רוכבים על אופנוע מספר 1, וטלי ודניאלה רוכבות על אופנוע מספר 2, שונה מסידור בו טל ודני רוכבים על אופנוע מספר 2, וטלי ודניאלה רוכבות על אופנוע מספר 1.

ג) אותה הבעיה מסעיף א', אבל כעת $n/2$ מהאופנועים כחולים, ושאר האופנועים אדומים (הניחו כי n הוא מספר זוגי).
פרט לכך האופנועים זהים זה לזה. סידור בו טל ודני רוכבים על אופנוע כחול שונה מסידור בו טל ודני רוכבים על אופנוע אדום.

ד) התברר שרק ל $1.5n$ מהחברים יש רשיון תקף לנהיגה באופנוע (הניחו ש $1.5n$ הוא מספר שלם). בכמה דרכים הם יכולים להתחלק בין האופנועים כאשר כל האופנועים זהים?
(כמו קודם, חלוקה בה טל נוהג באופנוע ודני יושב מאחוריו שונה מחלוקה בה דני נוהג וטל יושב מאחוריו.)

<u>פתרון</u>

א) תחילה נתאים נהג לכל אופנוע – נבחר n מתוך $2n$ בלי חזרות ובלי חשיבות לסדר, כלומר $\binom{2n}{n}$.
כעת נתאים נוסע לכל נהג – יש $n!$ אפשרויות. סה"כ $\binom{2n}{n}\cdot n!=\frac{(2n)!}{n!}$.

ב) שוב נתאים נהג לכל אופנוע – נבחר n מתוך $2n$ בלי חזרות ועם חשיבות לסדר, כלומר $\frac{2n!}{n!}$.
כעת נתאים נוסע לכל נהג – יש $n!$ אפשרויות. סה"כ $(2n)!$.

ג) תחילה נתאים נהג לכל אופנוע כחול – נבחר $n/2$ מתוך $2n$ בלי חזרות ובלי חשיבות לסדר, כלומר $\binom{2n}{n/2}$.
כעת נתאים נהג לכל אופנוע אדום – נבחר $n/2$ מתוך $3n/2$ בלי חזרות ובלי חשיבות לסדר, כלומר $\binom{3n/2}{n/2}$.
ועתה נתאים נוסע לכל נהג – יש $n!$ אפשרויות.

סה"כ $\binom{2n}{n/2}\cdot\binom{3n/2}{n/2}\cdot n!=\frac{(2n)!}{\left(\frac{n}{2}\right)!\cdot\left(\frac{3n}{2}\right)!}\cdot\frac{\left(\frac{3n}{2}\right)!}{\left(\frac{n}{2}\right)!\cdot n!}\cdot n!=\frac{(2n)!}{\left(\frac{n}{2}\right)!\left(\frac{n}{2}\right)!}$.

לחילופין, כמו סעיף א', אך מתוך n הנהגים נבחר $n/2$ לאופנועים הכחולים ונקבל $\binom{2n}{n}\cdot n!\cdot\binom{n}{n/2}$.

ד) תחילה נתאים נהג לכל אופנוע – נבחר n מתוך $3n/2$ בלי חזרות ובלי חשיבות לסדר, כלומר $\binom{3n/2}{n}$.
כעת נתאים נוסע לכל נהג – יש $n!$ אפשרויות.

סה"כ $\binom{3n/2}{n}\cdot n!=\frac{\left(\frac{3n}{2}\right)!}{n!\left(\frac{n}{2}\right)!}\cdot n!=\frac{\left(\frac{3n}{2}\right)!}{\left(\frac{n}{2}\right)!}$.