פתרון תרגיל 2 אינפי 1 מדמ"ח

18 בדצמבר 2016

1. נזכור שאם $a \approx b$ לפי ההגדרה $a-b$ אינפיניטסימל.

(א) נתבונן בהפרש:

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{a-b}{ab}=\frac{1}{ab}\cdot(a-b)$$

כעת, a,b אינם אינפיניטסימלים ולכן גם ab אינו אינפיניטסימל. מצד שני $a-b$ אינפיניטסימל ולכן ההפרש הוא אכן אינפיניטסימל (מכפלה של מספר סופי באינפיניטסימל היא אינפיניטסימל), כנדרש.

(ב) נבחר: $a=\varepsilon, b=2\varepsilon$. $a-b=-\varepsilon$ הוא אינפיניטסימל, אך:

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{\varepsilon}-\frac{1}{2\varepsilon}=\frac{1}{2\varepsilon}$$

וזהו איננו אינפיניטסימל (אלא מספר אינסופי).

(ג) מתקיים:

$$0\le ||a|-|st\left(a\right)||\le |a-st\left(a\right)|$$

לפי אי־שוויון המשולש. $a-st\left(a\right)$ הוא אינפיניטסימל ולכן גם $|a|-|st\left(a\right)|$ אינפיניטסימל. אם כן: $st\left(|a|\right)=|st\left(a\right)|$ כנדרש.

(ד) מספיק להוכיח שמתקיים:

$$st\left(\frac{a}{b}\right)st\left(b\right)=st\left(a\right)$$

אך מתכונת הכפליות של החלק הסטנדרטי (כלומר: $st(xy) = st(x)\,st(y)$) נקבל:

$$st\left(\frac{a}{b}\right)st(b) = st\left(\frac{a}{b}\cdot b\right) = st(a)$$

כנדרש.

2. נחשב בכל סעיף את החלק הסטנדרטי.

(א) החלק הסטנדרטי של המכנה אינו 0 ולכן:

$$st\left(\frac{\varepsilon^3-\varepsilon^2+4\varepsilon}{3\varepsilon^2+2\varepsilon-3}\right) = \frac{st\left(\varepsilon^3-\varepsilon^2+4\varepsilon\right)}{st\left(3\varepsilon^2+2\varepsilon-3\right)} = \frac{0}{-3} = 0$$

(ב) נחלק את המונה והמכנה ב־H^2 ונקבל:

$$st\left(\frac{3H^2-5H+2}{H^2+1}\right) = st\left(\frac{3-\frac{5}{H}+\frac{2}{H^2}}{1+\frac{1}{H^2}}\right) = \frac{st\left(3-\frac{5}{H}+\frac{2}{H^2}\right)}{st\left(1+\frac{1}{H^2}\right)} = \frac{3}{1} = 3$$

מכיוון שהביטויים $\frac{2}{H^2}, \frac{5}{H}, \frac{1}{H^2}$ הם אינפיניטסימלים.

(ג) לפי חוקי הכפל המקוצר:

$$st\left(\frac{4-a}{2-\sqrt{a}}\right) = st\left(\frac{\left(2-\sqrt{a}\right)\left(2+\sqrt{a}\right)}{2-\sqrt{a}}\right) = st\left(2+\sqrt{a}\right) = 2+\sqrt{st(a)} = 2+\sqrt{4} = 4$$

(ד) נכפיל ונחלק בצמוד:

$$st\left(\frac{3-\sqrt{c+2}}{c-7}\right) = st\left(\frac{\left(3-\sqrt{c+2}\right)\left(3+\sqrt{c+2}\right)}{\left(3+\sqrt{c+2}\right)(c-7)}\right) = st\left(\frac{9-c+2}{\left(3+\sqrt{c+2}\right)(c-7)}\right) =$$

$$st\left(\frac{7-c}{\left(3+\sqrt{c+2}\right)(c-7)}\right) = st\left(\frac{-1}{\left(3+\sqrt{c+2}\right)}\right) = -\frac{1}{3+\sqrt{st(c)+2}} = -\frac{1}{3+\sqrt{7+2}} = -\frac{1}{6}$$

(ה) נכפיל ונחלק בצמוד:

$$st\left(\frac{\sqrt{25-\varepsilon}-5}{\varepsilon}\right) = st\left(\frac{\left(\sqrt{25-\varepsilon}-5\right)\left(\sqrt{25-\varepsilon}+5\right)}{\varepsilon\left(\sqrt{25-\varepsilon}+5\right)}\right) = st\left(\frac{25-\varepsilon-25}{\varepsilon\left(\sqrt{25-\varepsilon}+5\right)}\right) =$$

$$st\left(\frac{-1}{\left(\sqrt{25-\varepsilon}+5\right)}\right)=-\frac{1}{\sqrt{25}+5}=-\frac{1}{10}$$

(ו) נחלק את המונה והמכנה ב־$\sqrt{H}$:

$$st\left(\frac{\sqrt{H+1}}{\sqrt{2H}+\sqrt{H-1}}\right)=st\left(\frac{\sqrt{1+\frac{1}{H}}}{\sqrt{2}+\sqrt{1-\frac{1}{H}}}\right)=\frac{\sqrt{1+st\left(\frac{1}{H}\right)}}{\sqrt{2}+\sqrt{1-st\left(\frac{1}{H}\right)}}=\frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

(ז) נכפיל ונחלק בצמוד:

$$st\left(\sqrt{H^2+H+1}-H\right)=st\left(\frac{H^2+H+1-H^2}{\sqrt{H^2+H+1}+H}\right)=st\left(\frac{H+1}{\sqrt{H^2+H+1}+H}\right)$$

נחלק את המונה והמכנה ב־H ונקבל:

$$st\left(\frac{1+\frac{1}{H}}{\sqrt{1+\frac{1}{H}+\frac{1}{H^2}}+1}\right)=\frac{1}{\sqrt{1}+1}=\frac{1}{2}$$

3. נגזור לפי ההגדרה: $f'(x)=st\left(\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right)$

(א) הנגזרת היא:

$$f'(x)=st\left(\frac{a\left(x+\Delta x\right)^2+b\left(x+\Delta x\right)+c-ax^2-bx-c}{\Delta x}\right)=st\left(\frac{2ax\Delta x+a\left(\Delta x\right)^2+b\Delta x}{\Delta x}\right)=$$

$$st\left(2ax+b+a\Delta x\right)=2ax+b$$

הפונקציה והנגזרת מוגדרות בכל $\mathbb{R}$.

(ב) הנגזרת היא:

$$f'\left(x=\right)st\left(\frac{\frac{1}{(x+\Delta x)^2+1}-\frac{1}{x^2+1}}{\Delta x}\right)=st\left(\frac{x^2+2x\Delta x+\left(\Delta x\right)^2+1-x^2-1}{\left(\left(x+\Delta x\right)^2+1\right)\left(x^2+1\right)\Delta x}\right)=$$

$$=st\left(\frac{2x+\Delta x}{\left(\left(x+\Delta x\right)^2+1\right)\left(x^2+1\right)}\right)=\frac{2x}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+1\right)}=\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}$$

הפונקציה והנגזרת מוגדרות בכל $\mathbb{R}$.

(ג) ראשית, נשים לב שתחום ההגדרה של הפונקציה הוא $x \geq 0$.

הנגזרת היא:

$$f'(x) = st\left(\frac{(x+\Delta x)\sqrt{x+\Delta x} - x\sqrt{x}}{\Delta x}\right) = st\left(\frac{x\left(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}\right)}{\Delta x} + \sqrt{x+\Delta x}\right) =$$

נכפיל ונחלק בצמוד:

$$st\left(\frac{x\left(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}\right)}{\Delta x}\cdot\frac{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}\right)+\sqrt{x} = st\left(\frac{x\left(x+\Delta x - x\right)}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}\right)+\sqrt{x} =$$

$$st\left(\frac{x}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}\right)+\sqrt{x}$$

כעת, אנו רואים שכאשר $x = 0$ הנגזרת אינה מוגדרת. בשאר המקרים נקבל:

$$st\left(\frac{x}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}\right)+\sqrt{x} = \frac{x}{\sqrt{x}+\sqrt{x}}+\sqrt{x} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

תחום ההגדרה של הנגזרת הוא $x > 0$.

(ד) הפונקציה מוגדרת לכל x. כדי לגזור את הפונקציה נחלק למקרים בהתאם לתחומי החיוביות והשליליות של $(x-1)^3$.

כאשר $x > 1$, $(x-1)^3 > 0$ ולכן $f(x) = (x-1)^3$. לכן:

$$f'(x) = st\left(\frac{(x+\Delta x-1)^3-(x-1)^3}{\Delta x}\right)$$

נשים לב שמתקיים:

$$(x+\Delta x-1)^3 = ((x-1)+\Delta x)^3 = (x-1)^3+3(x-1)^2\Delta x+3(x-1)(\Delta x)^2+(\Delta x)^3$$

ולכן:

$$st\left(\frac{(x+\Delta x-1)^3-(x-1)^3}{\Delta x}\right) = st\left(\frac{3(x-1)^2\Delta x+3(x-1)(\Delta x)^2+(\Delta x)^3}{\Delta x}\right) =$$

$$st\left(3(x-1)^2+3(x-1)(\Delta x)+(\Delta x)^2\right) = 3(x-1)^2$$

באופן דומה, כאשר $x < 1$, $(x-1)^3 < 0$ ולכן $f(x) = -(x-1)^3$. לכן:

$$f'(x) = st\left(\frac{-(x+\Delta x-1)^3+(x-1)^3}{\Delta x}\right) = -st\left(\frac{(x+\Delta x-1)^3-(x-1)^3}{\Delta x}\right)$$

ולפי החישוב שכבר ביצענו נקבל:

$$-3\left(x-1\right)^{2}$$

כאשר $x=1$, $f\left(1\right)=0$ וגם $f\left(1+\Delta x\right)=\left|\left(\Delta x\right)^{3}\right|$. לכן:

$$f'\left(1\right)=st\left(\frac{\left|\left(\Delta x\right)^{3}\right|}{\Delta x}\right)$$

כאשר $\Delta x>0$ נקבל $\left(\Delta x\right)^{2}$ וכאשר $\Delta x<0$ נקבל $-\left(\Delta x\right)^{2}$, ובכל מקרה:

$$f'\left(1\right)=st\left(\pm\left(\Delta x\right)^{2}\right)=0$$

ולכן הנגזרת ממוגדרת בכל נקודה.

(ה) למשוואה הריבועית $3x^{2}+x+5$ אין שורשים, אם כן $3x^{2}+x+5>0$ לכל x ולכן הפונקציה מוגדרת לכל x (זו פרבולה מחייכת :)).

הנגזרת היא:

$$f'\left(x\right)=st\left(\frac{\sqrt{3\left(x+\Delta x\right)^{2}+x+\Delta x+5}-\sqrt{3x^{2}+x+5}}{\Delta x}\right)=$$

נכפיל ונחלק בצמוד ונקבל:

$$st\left(\frac{3\left(x+\Delta x\right)^{2}+x+\Delta x+5-\left(3x^{2}+x+5\right)}{\Delta x\left(\sqrt{3\left(x+\Delta x\right)^{2}+x+\Delta x+5}+\sqrt{3x^{2}+x+5}\right)}\right)=$$

נסדר את המונה ונקבל:

$$st\left(\frac{6x\Delta x+3\left(\Delta x\right)^{2}+\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{3\left(x+\Delta x\right)^{2}+x+\Delta x+5}+\sqrt{3x^{2}+x+5}\right)}\right)=$$

$$st\left(\frac{6x+3\left(\Delta x\right)+1}{\left(\sqrt{3\left(x+\Delta x\right)^{2}+x+\Delta x+5}+\sqrt{3x^{2}+x+5}\right)}\right)=\frac{6x+0+1}{\left(\sqrt{3x^{2}+x+5}+\sqrt{3x^{2}+x+5}\right)}$$

ובסך הכל נקבל:

$$\frac{6x+1}{2\sqrt{3x^2+x+5}}$$

שימו לב שהחלק הסטנדרטי של המכנה אכן שונה מ-0 (כמו שהסברנו בתחילת הסעיף).

גם הנגזרת מוגדרת לכל x.

(ו) הפונקציה מוגדרת לכל $x \neq -4$.

הנגזרת היא:

$$f'(x) = st\left(\frac{\frac{2(x+\Delta x)-3}{x+\Delta x+4} - \frac{2x-3}{x+4}}{\Delta x}\right) =$$

נעשה מכנה משותף במונה ונקבל:

$$st\left(\frac{(2x+2\Delta x-3)(x+4)-(2x-3)(x+\Delta x+4)}{\Delta x(x+\Delta x+4)(x+4)}\right) =$$

נפתח את הסוגריים, נסדר ונישאר עם:

$$st\left(\frac{11\Delta x}{\Delta x(x+\Delta x+4)(x+4)}\right) = st\left(\frac{11}{(x+\Delta x+4)(x+4)}\right) = \frac{11}{(x+4)^2}$$

גם הנגזרת מוגדרת לכל $x \neq 4$.

(ז) הפונקציה מוגדרת כאשר $x \geq 0$ וגם $x - \sqrt{x} \neq 0$, כלומר $x \geq 0$ וגם $x \neq 1$.

הנגזרת היא:

$$f'(x) = st\left(\frac{\frac{4}{x+\Delta x-\sqrt{x+\Delta x}} - \frac{4}{x-\sqrt{x}}}{\Delta x}\right) =$$

נעשה מכנה משותף במונה ונקבל:

$$st\left(\frac{4(x-\sqrt{x})-4\left(x+\Delta x-\sqrt{x+\Delta x}\right)}{\Delta x\left(x+\Delta x-\sqrt{x+\Delta x}\right)(x-\sqrt{x})}\right) = st\left(\frac{4\left(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}\right)-4\Delta x}{\Delta x\left(x+\Delta x-\sqrt{x+\Delta x}\right)(x-\sqrt{x})}\right) =$$

$$4\cdot\left(st\left(\frac{\left(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}\right)}{\Delta x\left(x+\Delta x-\sqrt{x+\Delta x}\right)(x-\sqrt{x})}\right) - st\left(\frac{\Delta x}{\Delta x\left(x+\Delta x-\sqrt{x+\Delta x}\right)(x-\sqrt{x})}\right)\right)$$

במחובר הימני Δx מצטמצם ונקבל:

$$st\left(\frac{1}{\left(x+\Delta x-\sqrt{x+\Delta x}\right)(x-\sqrt{x})}\right) = \frac{1}{(x-\sqrt{x})^2}$$

במחובר השמאלי נכפיל ונחלק בצמוד של המונה ונקבל:

$$st\left(\frac{\left(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}\right)}{\Delta x\left(x+\Delta x-\sqrt{x+\Delta x}\right)\left(x-\sqrt{x}\right)}\cdot\frac{\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}\right)=$$

$$=st\left(\frac{\Delta x}{\Delta x\left(x+\Delta x-\sqrt{x+\Delta x}\right)\left(x-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}\right)$$

Δx מצטמצם ונקבל:

$$st\left(\frac{1}{\left(x+\Delta x-\sqrt{x+\Delta x}\right)\left(x-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}\right)=\frac{1}{\left(x-\sqrt{x}\right)^2\left(\sqrt{x}+\sqrt{x}\right)}$$

בסך הכל הנגזרת היא:

$$f'\left(x\right)=4\left(\frac{1}{2\left(x-\sqrt{x}\right)^2\sqrt{x}}-\frac{1}{\left(x-\sqrt{x}\right)^2}\right)=\frac{2-4\sqrt{x}}{\left(x-\sqrt{x}\right)^2\sqrt{x}}$$

גם תחום ההגדרה של הנגזרת הוא $x\geq 0, x\neq 1$.