

מבנים אלגבריים - תרגיל 6 תשע"ה

1. הוכיחו כי הת"ח הבאות הן נורמליות ע"י כך שתראו שהן גרעין של איזשהו הומומורפיזם.

(א) $G \times \{e_G\} \leq G \times G$ (רמז: חשבו על ההטלה על הרכיב השני $f(x, y) = y$).

(ב) $\langle \sigma \rangle \leq D_n$ כאשר σ הוא היוצר מסדר n .

(רמז: העזרו בהעתקה $f(\tau^i \sigma^j) = i \in \mathbb{Z}_2$)

להבהרה: $D_n = \{id, \sigma, \sigma^2, \dots, \sigma^{n-1}, \tau, \tau\sigma, \tau\sigma^2, \dots, \tau\sigma^{n-1}\}$ החבורה

הדיהדרלית (חלקכם ראה סימונים אחרים ליוצרים- השתמשו במה שנוח לכם).

עוד רמז: ידוע שבחבורה הדיהדרלית $\sigma^k \tau = \tau \sigma^{k(n-1)}$ לכל $k \in \mathbb{Z}$.

(ג) $H \leq \mathbb{R}^3$ כאשר H הוא המישור המיוצג ע"י המשוואה $2x + 4y - z = 0$.

2. תהי G חבורה, $H \leq G$. הוכיחו: הסדר של $g + H$ הוא n אם n הוא המס' הטבעי

המינימלי המקיים $g^n \in H$.

3. נתבונן בחבורה \mathbb{R}^2 , היא אבלית ולכן הת"ח $H = \langle (2, 2) \rangle$ היא נורמלית.

מה הסדר של האיבר $(1, 1)$ ב \mathbb{R}^2/H ? מה הסדר של האיבר $(1, 1) + H$ בחבורת המנה

\mathbb{R}^2/H ?

4. רשמו את התמורות הבאות כמכפלה של מחזורים זרים וחשבו את התמורה ההופכית:

$$(א) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 7 & 3 & 5 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(ב) (1452)(13)(3)(2514)$$

5. פתרו את המערכות הבאות:

$$(א) (135)x = (12)(245)$$

$$(ב) (153)x(42) = (13)(245)$$

$$6. \text{ נתונה התמורה } \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 7 & 6 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \text{ ב } S_7.$$

(א) רשמו אותה כמכפלה של מחזורים זרים.

(ב) האם $\sigma \in A_7$?

(ג) מה הסדר של σ^3 ?

(ד) עבור $\tau = (354)(12)$ חשבו את $\tau \sigma \tau^{-1}$.

7. מצא ת"ח מסדר 12 ב S_8 .