הרצאה XVII- מכניקה

היום נעסוק בדיאגרמות אנרגיה, ונבין את המשמעות והשימוש הפיסיקאלי בהם.

הבוחן יכלול את החומר עד תרגיל 7, כולל תרגיל 7.

בהרצאה קודמת הגדרנו $\oint_{\bar{r}_i}^{\bar{r}_f} F \cdot d\bar{r} = -U(r_f) + R(r_i) = E_k^f - E_k^i$ ומכאן הראנו ש$E_k^f + U(r_f) = E_k^i + U(r_i)$.

האנרגיה הפוטנציאלית היא פונקציה עם שלושה משתנים, $U(x,y,z)$.

בהרצאה קודמת גם כתבנו : $\underbrace{\int_x^{x+\Delta x} F \cdot dx}_{\approx F(x)\Delta x} = -U(x+\Delta x) + U(x)$. אם נציב זאת $-F(x)\Delta x = U(x+\Delta x) - U(x)$

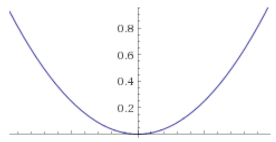
נבדוד ונקבל $F(x) = -\frac{U(x+\Delta x)-U(x)}{\Delta x} = -\frac{dU}{dx}$. נגדיר גם בהתאם לאינטגרל שרשמנו בתחילת ההרצאה $P = \frac{dW}{dt}$. את

היחידות של עבודה הגדרנו להיות ג׳אול J, לכן היחידות של הספק הם ג׳אול לשניה, ונגדיר אותם להיות וואט W.

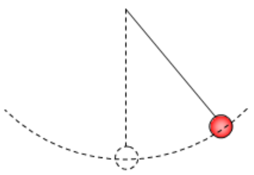
דוגמא : את נקודת שיווי המשקל של קפיץ כלשהו נסמן בx_0 . נחשב את

העבודה של כח הקפיץ : $\int_{x_0}^{x} F \cdot dx = -U(x) + U(x_0)$ ועי״פ חוק הוק מתקיים $-k\int_{x_0}^{x}(x-x_0)dx = -\frac{k}{2}(x-x_0)^2$

ולכן מתקיים $U(x) = \frac{k}{2}(x-x_0)^2$, האנרגיה הפוטנציאלית של הקפיץ.



הדיאגרמה , כאשר הנקודת מינימום היא x_0. הגרף מתאר את האנרגיה הפוטנציאלית כפונקציה של המיקום.

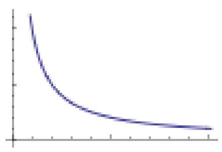


דוגמא : מטוטלת מוחזקת בשיווי משקל. אורך החוט הוא L. מהי האנרגיה במהלך התנועה של המטוטלת לאחר הזזה?

הוכחנו בישעור קודם שהאנרגיה הפוטנציאלית נתונה ע״י $U(h) = mgh$ ובמקרה

שלנו תלוי בזווית, לכן $U(h) = mg(1-\cos\theta)$. הגרף יהיה דומה לזה של פונקצית cos. לכן דיאגרמת האנרגיה היא :

ברור שיגיע למקסימום ב180^0, והפונקציה היא מחזורית.



אם מדובר בגרף אנרגיה של אלקטרון מסויים כשהוא מתקרב ליון שלילי אחר מתקיים בה הגרף שמשמאל בהתאם להגדרת האנרגיה החשמלית :

ניתן לראות שברגע שיגיע למרחק גדול מספיק (אינסוף) האנרגיה הפוטנציאלית שלו תתאפס, ז״א שהאנרגיה הקינטית שלו נהיית קבועה.

המרצה דיבר הסבר נרחב על אנרגיות ורמות אנרגיה של אטומים, ודיבר על כוחות כימיים גם כן. לא קשור אלינו ☺ .

חשוב לציין שברוב דיאגרמות האנרגיה הנגזרת השניה היא חיובית, ואז מתקבל סוג של בור עם נקודת מינימום. באופן כללי, ניתן להשתמש בטור טיילור ולרשום $U(x) = U(x_0) + \frac{1}{2}\frac{d^2U}{dx^2}(x-x_0)^2$. ולכן $U(x) = \frac{1}{2}U''(x-x_0)^2$. יכולנו לצמצם $U(x_0)$ כאילו הוא 0, כי אנו יכולים לבחור ישר יחוס כלשהו בהתאם לשאלה, וטבעי לבחור זאת בישר של הקבוע המדובר $U(x_0)$.

<u>אנרגיה כוללת</u> : $\mathrm{E_T} = \frac{1}{2}m\bar{v}\cdot\bar{v} + U(x,y)$ נגזור את שתי הצדדים ונקבל $m\bar{v}\cdot\bar{a} + \frac{d}{dt}U(x,y) = 0$. נוכיח או בהמשך ההרצאה או בהרצאה הבאה כי מתקיים $\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dt}$. כאשר $\frac{\partial U}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{U(x+\Delta x,y)-U(x,y)}{\Delta x}$. ז״א הסימון החדש

הוא נגזרת חלקית של הפונקציה לפי x ומסמנים אותה $\frac{\partial U}{\partial x}$. באופן דומה נגדיר $\frac{\partial U}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{U(x,y+\Delta y)-U(x,y+\Delta y)}{\Delta y}$. מכאן

שמתקיים $0 = \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dt} + m\bar{v}\cdot\bar{a}$. ז״א $\bar{v}\cdot(m\bar{a} + \underbrace{\frac{\partial U}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{y}}_{=-F}) = 0$ ולכן $\mathrm{F} = -(\frac{\partial U}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{y})$.

נדגים את הקשר ע״י דוגמא: $U(x,y) = xy^2$. נביט בפיתוח: $\frac{\partial U}{\partial x} = y^2$, וגם $\frac{\partial U}{\partial x} = 2xy$. אם נביט מהכיוון השני נראה כי מדובר באותו ביטוי. $\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dt}$.

<u>נוכיח את המשפט/טענה</u>: ראשית צריך לדעת שמתקיימים כמה דברים: $\dot{x} = \frac{x(t+\varepsilon)-x(t)}{\varepsilon}$ ולכן $x(t+\varepsilon) = x(t) + \dot{x}\varepsilon$.

טענה נוספת: ע״פ הגדרה $\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{U[(x+\Delta x),y]-U[x,y]}{\Delta x}$ ולכן מתקיים $U[(x+\Delta x),y] = \frac{\partial U}{\partial x}\Delta x + U[x,y]$. מכאן ההוכחה

כמעט טריוויאלית: $\frac{dU}{dt} = \frac{U[x(t+\varepsilon),y(t+\varepsilon)]-U[x(t),y(t)]}{\varepsilon} = \frac{U[x(t)+\dot{x}\varepsilon,y(t)+\dot{y}\varepsilon]-U[x(t),y(t)]}{\varepsilon} = \frac{\frac{\partial U}{\partial x}\dot{x}\varepsilon+U[x(t),y(t)+\dot{y}\varepsilon]-U[x(t),y(t)]}{\varepsilon} =$

$$= \frac{\frac{\partial U}{\partial x}\dot{x}\varepsilon+U[x(t),y(t)]+\frac{\partial U}{\partial y}\dot{y}\varepsilon-U[x(t),y(t)]}{\varepsilon} = \frac{\frac{\partial U}{\partial x}\dot{x}\varepsilon+\frac{\partial U}{\partial y}\dot{y}\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{\partial U}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial U}{\partial y}\dot{y} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dt} \underbrace{=}_{\text{בהתאם למה שהגדרנו}} \frac{dU}{dt}$$