תרגול 10 בדידה להנדסה

22 בינואר 2015

כמה הגדרות:

1. יחס $R \subseteq A \times B$ ייקרא **שלם**, אם לכל $a \in A$ קיים $b \in B$ כך ש: $(a,b) \in R$.
2. יחס $R \subseteq A \times B$ ייקרא **חד־ערכי**, אם: $(a,b_1),(a,b_2) \in R \to b_1 = b_2$.

יחס המקיים את שתי התכונות האלו ייקרא **פונקציה.**

3. נגדיר את **התחום** של היחס כתת הקבוצה הבאה של A:

$$Dom(R) = \{a \in A | \exists b \in B.(a,b) \in R\}$$

4. נגדיר את **התמונה** של היחס כתת הקבוצה הבאה של B:

$$Im(R) = \{b \in B | \exists a \in A.(a,b) \in R\}$$

5. **הטווח** של היחס הוא פשוט הקבוצה השנייה במכפלה הקרטזית, B.

<u>לדוגמה:</u>

נתבונן בקבוצה $A = \{1,2,3,4\}$ וביחס: $R = \{(1,2),(2,2),(3,4)\}$.

היחס הוא חד־ערכי, אך לא שלם (ל־$4 \in A$ לא קיים $b \in A$ כך ש־$(4,b) \in R$).

$$Dom(R) = \{1,2,3\}$$

$$Im(R) = \{2,4\}$$

שימו לב שיחס $R \subseteq A \times B$ הוא שלם אם ורק אם $Dom(R) = A$.

<u>סימון:</u>

כאשר נתון לנו יחס $f \subseteq A \times B$ שהוא פונקציה, נסמן:

$$f : A \to B$$

בנוסף, הסימון: $f(a) = b$ פירושו $(a, b) \in f$.

במצב כזה a ייקרא **מקור** של b ו$-b$ ייקרא **התמונה** של a. נא לא להתבלבל עם התמונה שהגדרנו מקודם.

עוד קצת הגדרות:

1. נאמר שפונקציה $f : A \to B$ היא **חח"ע**, אם $f(a_1) = f(a_2) \to a_1 = a_2$ (ובאופן שקול: $a_1 \neq a_2 \to f(a_1) \neq f(a_2)$).

   כלומר, לכל תמונה יש מקור יחיד.

2. נאמר שפונקציה היא **על**, אם $Im(f) = B$ כלומר אם התמונה היא הטווח.

   לשון אחר, לכל איבר בטווח יש מקור בתחום.

<u>לדוגמה:</u>

1. נתבונן בפונקציה:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

המוגדרת ע"י:

$$f(x) = 6x - 2$$

הפונקציה חח"ע, מכיוון שאם $f(x_1) = f(x_2)$ אז:

$$6x_1 - 2 = 6x_2 - 2$$

ולכן ברור ש-$x_1 = x_2$.

הפונקציה על, מכיוון שלכל $y \in \mathbb{R}$ יש מקור:

$$f\left(\frac{y+2}{6}\right) = 6 \cdot \left(\frac{y+2}{6}\right) - 2 = y$$

2. נתבונן בפונקציה:

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

המוגדרת ע"י:

$$g(x) = x^4 - 1$$

הפונקציה לא חח"ע, כי $g(1) = g(-1) = 0$ אך $1 \neq -1$.

הפונקציה לא על, כי לכל $y < -1$ אין מקור, כי $x^4 \geq 0$ ולכן $g(x) \geq -1$.

כדי להראות שפונקציה היא חח"ע, פשוט בודקים האם ההגדרה מתקיימת.

כדי להראות שפונקציה היא על, כדאי להציב: $f(x) = y$ ולראות אם אפשר לבודד את y כפונקציה של x; אם כן, אז הביטוי לפי y הוא המקור של y.

הרכבת פונקציות:

תהיינה $f : A \to B, g : B \to C$ פונקציות. נגדיר את ההרכבה ביניהן להיות:

$$(g \circ f)(a) = g(f(a))$$

$g \circ f : A \to C$ היא פונקציה.

<u>לדוגמה:</u>

אם נתבונן ב-f, g מהדוגמה הקודמת שלנו נקבל:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(6x - 2) = (6x - 2)^4 - 1$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^4 - 1) = 6(x^4 - 1) - 2$$

שימו לב שהרכבה אינה קומוטטיבית, אינה חילופית - הסדר בה נרכיב פונקציות זו על זו משנה את התוצאה הסופית.

*הרכבת פונקציות היא מקרה פרטי של הרכבת יחסים כמו שראינו בתרגול 7.

<u>תרגיל:</u>

תהיינה $f : A \to B, g : B \to C$ פונקציות כך שההרכבה $g \circ f$ חח"ע. האם f חח"ע? ומה לגבי g?

<u>פתרון:</u>

ההרכבה שלנו חח"ע, לכן אם $a_1 \neq a_2$ אז $g \circ f(a_1) \neq g \circ f(a_2)$.

כעת, אם $a_1 \neq a_2$ אז $g(f(a_1)) \neq g(f(a_2))$. אלא ש$-g$ היא פונקציה ולכן חד ערכית, ולכן אם התמונות שונות המקורות שונים, כלומר:

$$g(f(a_1)) \neq g(f(a_2)) \to f(a_1) \neq f(a_2)$$

וסה"כ $a_1 \neq a_2 \to f(a_1) \neq f(a_2)$ ולכן הפונקציה f חח"ע.

g לא בהכרח חח"ע. נתבונן למשל בקבוצות:

$$A = \{1\}, B = \{1, 2\}, C = \{3\}$$

ונגדיר פונקציות:

$$f : A \to B, f(1) = 1$$

$$g : B \to C, g(1) = g(2) = 3$$

כעת, ההרכבה היא $g \circ f(1) = g(f(1)) = g(1) = 3$ אכן חח"ע (יש רק מקור אחד אז זה טריוויאלי) אך gלא חח"ע, כי $g(1) = g(2)$ אך $2 \neq 1$.

הגדרה:

תהי A קבוצה. **יחס הזהות** הוא יחס:

$$Id_A = \{(a,a)|a \in A\}$$

יחס הזהות הוא פונקציה.

פונקציה זו שולחת כל איבר ב$-A$ לעצמו, כלומר:

$$Id_A : A \to A, Id_A(a) = a$$