תרגול 9

4 אוגוסט, 2016

$Power\ Method$

<u>תרגיל:</u>

תהיינה -

$$A=\begin{pmatrix}4&1&0\\0&2&1\\0&0&-1\end{pmatrix},\quad \underbrace{x_0}_{\text{ניחוש התחלתי}}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

מצא בעזרת $power\ method$ את הע"ע הגדול ביותר ואת הו"ע המתאים לו.

<u>פתרון:</u>

<u>צעד 1</u> –

$$A*x_0=\begin{pmatrix}4&1&0\\0&2&1\\0&0&-1\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\3\\-1\end{pmatrix}$$

לכן –

$$x_1=\frac{1}{\left\|\begin{pmatrix}5\\3\\-1\end{pmatrix}\right\|_\infty}*\begin{pmatrix}5\\3\\-1\end{pmatrix}=\frac{1}{\max\{5,3,1\}}*\begin{pmatrix}5\\3\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0.4\\-0.2\end{pmatrix}$$

<u>צעד 2</u> –

$$A*x_1=\begin{pmatrix}4&1&0\\0&2&1\\0&0&-1\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}1\\0.4\\-0.2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4.6\\1\\0.2\end{pmatrix}$$

לכן –

$$x_2=\frac{1}{\left\|\begin{pmatrix}4.6\\1\\0.2\end{pmatrix}\right\|_\infty}*\begin{pmatrix}4.6\\1\\0.2\end{pmatrix}=\frac{1}{\max\{4.6,1,0.2\}}*\begin{pmatrix}4.6\\1\\0.2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0.217\\0.0435\end{pmatrix}$$

<u>צעד 3</u> –

$$A*x_2=\begin{pmatrix}4&1&0\\0&2&1\\0&0&-1\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}1\\0.217\\0.0435\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4.2714\\0.4783\\-0.0435\end{pmatrix}$$

לכן –

$$x_3=\frac{1}{\max\{4.2714,0.4783,0.0435\}}*\begin{pmatrix}4.2714\\0.4783\\-0.0435\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0.1132\\-0.0103\end{pmatrix}$$

<u>צעד 4</u> –

$$A * x_3 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 0.1132 \\ -0.0103 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.1132 \\ 0.2161 \\ 0.0103 \end{pmatrix}$$

לכן –

$$x_4 = \frac{1}{4.1132} * \begin{pmatrix} 4.1132 \\ 0.2161 \\ 0.0103 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.0525 \\ 0.0025 \end{pmatrix}$$

בדומה נמשיך ככה עד שלבסוף נקבל –

$$x_k = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\lambda_k} = \frac{\|Ax_k\|_\infty}{\|x_k\|_\infty} = \frac{\left\|\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\|_\infty}{\left\|\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\|_\infty} = \boxed{4}$$

■

<u>הערה:</u>

<u>יתרון</u>: תמיד מתכנס אם קיימים ע"ע ממשיים.

<u>חסרון</u>: השיטה מתכנסת רק לע"ע הגבוה ביותר.

<u>תרגול 9</u>

<u>$Inverse\ P.M$</u>

כדי למצוא את הע"ע המינימלי של A, נחשב את הע"ע המקסימלי של A^{-1}, כאשר נעזר במשפט שאומר שאם M ע"ע של A, אזי $\lambda = \frac{1}{M}$ ע"ע של A^{-1}.

<u>דוגמה:</u>

<u>נתון</u> –

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ההופכית היא –

$$=> \ A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

כעת נחפש את הע"ע המקסימלי של A^{-1} (בדרך טיפה שונה מהדרך שעשינו בתרגיל הקודם):

<u>צעד 1</u> –

$$A^{-1} * x_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{המספר הזה הולך להתכנס לע"ע המקסימלי}} * \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix}}_{x_1}$$

<u>צעד 2</u> –

$$A^{-1} * x_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{16} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} * \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{8} \\ 1 \end{pmatrix}}_{x_2}$$

בסה"כ אם נמשיך נראה ש - $M = \frac{1}{2}$ הערך העצמי המקסימלי של A^{-1}. לכן –

$$\lambda = \frac{1}{M} = \frac{1}{0.5} = 2$$

ולכן הע"ע המינימלי של A הוא 2.

$\underline{Shifted\ P.M}$

אם ידוע לי את הע"ע הגדול ביותר של A, ניתן למצוא לפחות עוד ע"ע אחד ע"י טכניקת הזזה:

נגדיר מטריצה חדשה – $B = A - \lambda I$ (כאשר λ הוא הע"ע הגדול ביותר של A) ובצע את תהליך $P.M$ על B, ונמצא עבורה את הע"ע הגדול ביותר בערכו המוחלט ונסמנו M. מכאן נקבל –

$$\boxed{\underbrace{\lambda_2}_{\text{של } A} = \underbrace{M}_{\text{מתוך } B \text{ ע"י } P.M} + \underbrace{\lambda_1}_{\text{ע"ע הגדול ביותר}}}$$

<u>דוגמה:</u>

נתונה המטריצה מהשאלה הראשונה בתרגול זה –

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

מצאנו שיחד עם הניחוש ההתחלתי - $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ הע"ע הגדול ביותר הינו – $\lambda_1 = 4$.

נמצא עוד ע"ע עבור A:

$$B = A - 4I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

יחד עם –

$$x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

<u>צעד 1</u> –

$$B * x_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} = -5 * \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \\ 1 \end{pmatrix}}_{x_1}$$

<u>צעד 2</u> –

$$B * x_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} \\ -5 \end{pmatrix} = -5 * \underbrace{\begin{pmatrix} -0.04 \\ 0.12 \\ 1 \end{pmatrix}}_{x_2}$$

לכן –

$$M = -5$$

ומהנוסחה לעיל –

$$\lambda_2(A) = -5 + \lambda_1 = -5 + 4 = -1$$

תרגול 9

4 אוגוסט, 2016

נוסחת ניוטון-רפסון $(N.R)$ רב מימדית

בהינתן n פונקציות ב - n נעלמים:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

ובהינתן היעקוביאן שלהם, כלומר –

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

נגדיר את הנוסחה האיטרטיבית –

$$\overrightarrow{x_{n+1}} = \overrightarrow{x_n} - J^{-1}(\overrightarrow{x_n}) * \vec{f}(\overrightarrow{x_n})$$

כאשר –

$$\vec{f}(\overrightarrow{x_n}) = \begin{pmatrix} f_1(\overrightarrow{x_n}) \\ f_2(\overrightarrow{x_n}) \\ \dots\dots\dots \\ f_n(\overrightarrow{x_n}) \end{pmatrix}$$

ואכן נוסחה זו מאוד דומה ל- $N.R$ הרגילה –

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

<u>דוגמה:</u>

נתונה המערכת הבאה –

$$\begin{cases} 4x^2 - y^2 + 2 = 0 \\ x^2 + 4y - 6 = 0 \end{cases}$$

וגם נתון הניחוש ההתחלתי –

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

נבצע איטרציה אחת בשיטת ניוטון-רפסון רב מימדית.

תרגול 9

נשים לב כי –

$$f_1(x,y) = 4x^2 - y^2 + 2$$

$$f_2(x,y) = x^2 + 4y - 6$$

נחשב את היעקוביאן –

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8x & -2y \\ 2x & 4 \end{pmatrix}$$

ונחשב את ההופכית –

$$=> \ J^{-1} = \frac{1}{32x + 4xy} * \begin{pmatrix} 4 & 2y \\ -2x & 8x \end{pmatrix}$$

ונציב את הניחוש ההתחלתי –

$$J^{-1}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{40}\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 2 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.1 & -0.1 \\ -0.05 & 0.2 \end{pmatrix}$$

עוד נחשב את –

$$\vec{f}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(-1,2) \\ f_2(-1,2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ומהנוסחה שיש לנו נבצע איטרציה אחת –

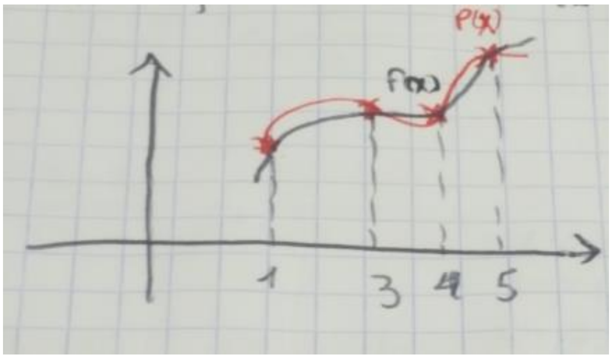
$$\boxed{\overrightarrow{x_1}} = \overrightarrow{x_0} - J^{-1}(\overrightarrow{x_0}) * \vec{f}(\overrightarrow{x_0}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -0.1 & -0.1 \\ -0.05 & 0.2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -0.5 \\ 1.5 \end{pmatrix}}$$

תרגול 9

4 אוגוסט, 2016

אינטרפולציה

המטרה: למצוא פולינום ($p(x)$) המייצג בדייקנות מרבית את ההתנהגות של פונקציה כלשהי $f(x)$.



נתונות נקודות בסיס (נקודות דגימה) - $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$, ונרצה שיתקיים –

$$p(x_i) = y_i$$

במילים פשוטות, פולינום האינטרפולציה עובר דרך כל נקודות הדגימה.

אינטרפולציה פולינומית (לפי פונקציות בסיס)

נתונות $n+1$ נקודות דגימה - $x_1, \dots, x_n, x_{n+1}$, אזי פולינום האינטרפולציה צריך לקיים –

$$\forall_{i=1,\dots,n+1}: p(x_i) = y_i$$

ולכן נוכל להגיד כי דרגת פולינום האינטרפולציה הוא n.

דוגמה:

נתונות פונקציות הבסיס הבאות –

$$1, \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right), \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

מצאו קירוב באמצעות אינטרפולציה העובר דרך 3 הנקודות - $(0,0), (1,1), (2,4)$ בעזרת פונקציות הבסיס.

נגדיר את פולינום האינטרפולציה -

$$f(x) = c_0 * 1 + c_1 * \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + c_2 * \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

נרצה למצוא את המקדמים בעזרת הנתונים על הנקודות, כלומר –

$$f(0)=0\ ,f(1)=1,f(2)=4$$

לכן נקבל מערכת של משוואות –

$$\begin{cases} f(0)=c_0*1+c_1*0+c_2*0=0 \\ f(1)=c_0*1+c_1*\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+c_2*\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=1 \\ f(2)=c_0*1+c_1*\sin(\pi)+c_2*\cos(\pi)=2 \end{cases}$$

נרשום בצורה של מטריצות –

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \sin(0) & \cos(0) \\ 1 & \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ 1 & \sin(\pi) & \cos(\pi) \end{pmatrix}}_{\text{מטריצת ונדרמונדה}} * \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$=> \begin{cases} c_0+c_2=0 \\ c_0+c_1=1 \\ c_0+c_2=4 \end{cases} => c_0=2\ ,c_1=-1\ ,c_2=-2$$

ולכן פולינום האינטרפולציה הינו –

$$f(x)=2-\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)-2\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

אינטרפולציית לגרנז'

הגדרה: אינטרפולציית לגרנז' באמצעות $n+1$ פונקציות בסיס שהן פולינומים ממעלה אפס עד n נקראת אינטרפולציה פולינומית.

נשים לב כי -

$$\underbrace{N}_{\substack{\text{דרגת} \\ \text{הפולינום}}} = \underbrace{n}_{\substack{\text{מספר נקודות} \\ \text{הדגימה}}} - 1$$

לכן נגדיר את פולינום האינטרפולציה של לגרנז' –

$$P_N(x)=\sum_{i=0}^{N} f(x_i)*l_i(x)$$

כאשר $l_i(x)$ נקראות <u>המשקולות של לגרנז'</u> ומוגדרות לפי –

$$l_i(x)=\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{N} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$$

תרגול 9

4 אוגוסט, 2016

הערות:

1) כמספר נקודות הדגימה כמספר $l_i(x)$.

2) $l_i(x)$ פונקציות של x.

3) נשים לב כי מתקיים –

$$l_i(x_i) = 1 \, , l_i(x_j) = 0$$

$$l_i(x_j) = \delta = \begin{cases} 1 \; , & i = j \\ 0 \; , & i \neq j \end{cases}$$

דוגמה:

נתונות הנקודות - $(\underbrace{0}_{x_0}, \underbrace{0}_{y_0}), (\underbrace{1}_{x_1}, \underbrace{1}_{y_1}), (\underbrace{2}_{x_2}, \underbrace{4}_{y_2})$ נמצא פולינום אינטרפולציה בשיטת לגרנז'.

מאחר ויש 3 נקודות דגימה אז - $N = 3 - 1 = 2$. לכן נבנה 3 משקולות לגרנז' –

$$i = 0 \, , l_0(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i = 0}}^{2} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} =_{\text{נציב}} \frac{(x - 1)(x - 2)}{(0 - 1)(0 - 2)}$$
$$= \frac{1}{2}(x - 1)(x - 2)$$

$$i = 1 \, , l_1(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i = 1}}^{2} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} =_{\text{נציב}} \frac{(x - 0)(x - 2)}{(1 - 0)(1 - 2)}$$
$$= -x(x - 2)$$

$$i = 2 \, , l_2(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i = 2}}^{2} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} =_{\text{נציב}} \frac{(x - 0)(x - 1)}{(2 - 0)(2 - 1)}$$
$$= \frac{1}{2}x(x - 1)$$

ובסה"כ נקבל –

$$\boxed{P_2(x)} = f(x_0)l_0(x) + f(x_1)l_1(x) + f(x_2)l_2(x) =$$

$$= 0 * \frac{1}{2}(x - 1)(x - 2) - x(x - 2) + 2 * \frac{1}{2}x(x - 1) = -x^2 + 2x + x^2 - x = \boxed{x}$$

הערה:

מכיוון שהתקיים ש - $f(x_0) = 0$ אז חישוב $l_0(x)$ היה מיותר!