תרגיל 6 מבוא לתורת החבורות

שאלה 6.1 תהיינה H, K שתי חבורות. הוכיחו כי $H \times \{e\} \lhd H \times K$.
פתרון: ניקח $(h, e) \in H \times \{e\}$ ואיבר כללי $(h', k') \in H \times K$ אז באמת

$$(h', k')(h, e)(h', k')^{-1} = (h'h(h')^{-1}, k'(k')^{-1}) = (h'h(h')^{-1}, e) \in H \times \{e\}$$

כנדרש.

שאלה 6.2 ניקח $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$. האם תתי החבורות הבאות הן נורמליות?

1. תת החבורה של המטריצות הסקלריות (כלומר מטריצות מהצורה cI).
פתרון: כן. קל לבדוק שאם cI סקלרית ו $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ מטריצה הפיכה אז

$$AcIA^{-1} = cI$$

שוב סקלרית (אפילו אותה סקלרית במקרה הזה). ולכן חבורת המטריצות הסקלריות היא תת חבורה נורמלית.

2. תת החבורה של המטריצות אלכסוניות (כלומר מטריצות שיש להן איברים רק על האלכסון).
פתרון: לא. אין בעיה למצוא מטריצה אלכסונית D ומטריצה הפיכה P כך ש PDP^{-1} אינה אלכסונית (הרי יש מטריצות לכסינות שאינן אלכסוניות).
למשל ניקח

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ו

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ואז

$$PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

אינה מטריצה אלכסונית.

שאלה 6.3 תהי $G = S_3$ ו $H = \langle \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rangle$. הראו כי הפעולה הטבעית על G/H אינה מוגדרת היטב.
פתרון: נסמן

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

קל לבדוק ש

$$aH = bH$$

אבל

$$a^2 = \mathrm{id} \in H$$

ואילו

$$b^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \notin H$$

ולכן a^2 ו b^2 הם לא באותו קוסט.

שאלה 6.4 בכל סעיף נתונה חבורה G ותת חבורה נורמלית H ויש לחשב סדר של איברים בחבורת המנה.

1. $G = \mathbb{Z}$ $H = 20\mathbb{Z}$. מה הסדר של $3 + H$, $5 + H$, $2 + H$?
פתרון: במקרה הזה חבורת המנה $\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$ היא פשוט $\mathbb{Z}_{20}$ ואנחנו כבר יודעים לחשב סדר של איברים ב $\mathbb{Z}_n$. במקרה שלנו

$$\mathrm{o}(2 + H) = 10$$

$$\mathrm{o}(5 + H) = 4$$

$$\mathrm{o}(3 + H) = 20$$

2. $G = \mathbb{Z}_{20}$ ו $H = \langle 5 \rangle$. מה הסדר של כל איבר ב G/H? הסיקו: איזו חבורה מוכרת איזומורפית ל G/H?
פתרון: נשים לב ש

$$H = \{0, 5, 10, 15\}$$

זו חבורה מגודל 4 ולכן G/H היא חבורה מגודל 5. ממילא G/H חייבת להיות ציקלית וכל איבר בה (פרט ליחידה H) הוא מסדר 5.

3. $G = U_{15}$ ו $H = \langle 4 \rangle$. מה הסדר של כל איבר ב G/H? הסיקו: איזו חבורה מוכרת איזומורפית ל G/H?
פתרון: במקרה הזה

$$H = \{1, 4\}$$

ו $|G| = \varphi(15) = 8$ ולכן G/H היא חבורה מסדר 4. נבדוק מה הסדרים של האיברים. האיברים ב G/H הם:

$$H = \{1, 4\}$$

$$2H = \{2, 8\}$$

$$7H = \{7, 13\}$$

$$11H = \{11, 14\}$$

עכשיו נבדוק סדרים:

$$(2H)^2 = 4H = H$$

$$(7H)^2 = 49H = 4H = H$$

$$(11H)^2 = 121H = H$$

ולכן כל האיברים מסדר 2. זה אומר ש $G/H \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

שאלה 6.5 תהי G חבורה ו $H \lhd G$ תת חבורה נורמלית. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

1. אם H ציקלית ו G/H ציקלית אז G ציקלית.
פתרון: לא. למשל $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ שהיא כידוע לא ציקלית ו $H = \mathbb{Z}_2$ אז $G/H \simeq \mathbb{Z}_2$ שהיא גם ציקלית. עוד דוגמא נגדית יש גם בדוגמא הבאה:

2. אם H אבלית ו G/H אבלית אז G אבלית.
פתרון: ניקח $G = S_3$ ו $H = \langle \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rangle$. הסדר של H הוא 3 ולכן היא ציקלית ולכן אבלית. היא ת"ח נורמלית כי היא מאינדקס 2. כמובן ש $G/H \simeq \mathbb{Z}_2$ ולכן זו חבורה ציקלית ולכן אבלית. אבל S_3 לא אבלית.

3. אם G אבלית אז G/H אבלית.
פתרון: כן. כי
$$aH \cdot bH = abH = baH = bH \cdot aH$$

4. אם G ציקלית אז G/H ציקלית.
פתרון: כן. אם a יוצר של G אז aH יוצר של aH. אם $g = a^k$ אז בוודאי ש $(aH)^k = gH$.

שאלה 6.6 נביט על $G = \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$. מצאו שתי תתי חבורות נורמליות N_1, N_2 שהן לא איזומורפיות, אבל

$$G/N_1 \simeq G/N_2$$

חבורות המנה איזומורפיות.
פתרון: ניקח $N_1 = \mathbb{Z}_4 \times \{e\}$ אז $G/N_1 \simeq \mathbb{Z}_2$. וניקח $N_2 = \{0, 2\} \times \mathbb{Z}_2$. זאת חבורה מסדר 4 ולכן G/N_2 מסדר 2 ולכן

$$G/N_2 \simeq \mathbb{Z}_2$$