

## פתרון תרגיל 7 אנליזה הרמונית תש"ף

16 בדצמבר 2019

1. משפט דיריכלה מדבר על התכנסות נקודתית של הטור, לא משנה איזו נקודה נציב בטור  $\sum \hat{f}(n) e^{inx}$  לא נקבל (את המקדמים בערך מוחלט בריבוע ולכן) את הטור  $\sum |\hat{f}(n)|^2$ , לכן תשובות 2, 4 לא נכונות. למת רימן-לבג טוענת ש:  $\hat{f}(n) \rightarrow 0$ , וזה לא אומר כלום על הטור  $\sum |\hat{f}(n)|^2$  (למשל, אם  $\hat{f}(n) = \frac{1}{n}$  הוא יתכנס ואם  $\hat{f}(n) = \frac{1}{\sqrt{n}}$  הוא יתבדר), לכן תשובה 1 לא נכונה. בהכרח, תשובה 3 היא הנכונה. אם רוצים לנמק "פוזיטיבית" למה זו התשובה, נזכור שמערכת הפונקציות שלנו היא מערכת אורתונורמלית שלמה, ולכן באי-שוויון בסל מתקיים שוויון - שוויון פרסבל, שבאמצעותו אפשר לחשב את סכום הטור (ובפרט לדעת שהוא מתכנס).

2. הפונקציה גזירה, ולכן לכל נקודה בתוך הקטע מתקיים:  $S(x) = f(x)$ . בפרט, עבור  $x = 0$  נקבל:

$$\frac{\pi}{2} = f(0) = S(0) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n)$$

ולכן הטור  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n)$  מתכנס. מצד שני, נשים לב שבקצוות ערכי הפונקציה שונים, ולכן - לפי דיריכלה - מתקיים:

$$S(\pm\pi) = \frac{f(\pi) + f(-\pi)}{2} = \frac{\frac{3\pi}{2}e^{\pi^2} - \frac{\pi}{2}e^{\pi^2}}{2} = \frac{\pi}{2}e^{\pi^2}$$

כלומר:

$$S(x) = \begin{cases} (x + \frac{\pi}{2})e^{x^2} & x \neq \pm\pi \\ \frac{\pi}{2}e^{\pi^2} & x = \pm\pi \end{cases}$$

הפונקציה  $S$  לא רציפה ולכן הטור לא מתכנס במ"ש, ולכן לא מתכנס בהחלט. כלומר,

הטור  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|$  מתבדר.

לבסוף, הטור  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2$  מתכנס לפי פרסבל.

3. רציפה,  $f' = 2xe^{x^2}$ , רציפה למקוטעין,  $f(\pi) = f(-\pi)$ . התנאים הדרושים מתקיימים ולכן טור פורייה של  $f$  מתכנס בהחלט, כלומר  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)|$  מתכנס. כמו כן, אפשר לגזור איבר-איבר ולקבל:  $2xe^{x^2} \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} in\widehat{f}(n)e^{inx}$ . נסמן את טור פורייה של  $f'$  ב- $S'$ .  $f'$  גזירה, ולכן בתוך הקטע  $S' = f'$ . לפי דיריכלה, בקצוות מתקיים:

$$S'(\pm\pi) = \frac{f'(\pi) + f'(-\pi)}{2} = \frac{2\pi e^{\pi^2} - 2\pi e^{\pi^2}}{2} = 0$$

כלומר:

$$S'(x) = \begin{cases} 2xe^{x^2} & x \neq \pm\pi \\ 0 & x = \pm\pi \end{cases}$$

$S'$  לא רציפה ולכן הטור לא מתכנס במ"ש ולכן לא מתכנס בהחלט, כלומר הטור:  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |in\widehat{f}(n)e^{inx}| = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n\widehat{f}(n)|$  מתבדר. לבסוף, הטור  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} n^2 |\widehat{f}(n)|^2$  מתכנס לפי פרסבל (על טור הנגזרות).