תרגול 8 בדידה להנדסה

22 בינואר 2015

<u>תרגיל:</u>

תהי A קבוצה לא ריקה ויהיו S,R יחסי שקילות עליה. האם היחסים הבאים הם יחס שקילות?

1. $R \cup S$.

<u>פתרון:</u>

לא בהכרח. נתבונן למשל בקבוצה $A = \{1,2,3\}$ וביחסים:

$$S = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1)\}$$

$$R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,3),(3,1)\}$$

כל אחד מהם הוא אכן יחס שקילות, אך:

$$R \cup S = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1),(1,3),(3,1)\}$$

אינו יחס שקילות מכיוון שהוא אינו טרנזיבי; $(2,1),(1,3) \in R \cup S$ אך $(2,3) \notin R \cup S$.

2. $(A \times A) \backslash R$.

<u>פתרון:</u>

לא. לכל $a \in A$, $(a,a) \in A \times A$ מהגדרת המכפלה הקרטזית ו-$(a,a) \in R$ כי היחס הוא יחס שקילות.

לכן, לפי הגדרת הפרש, $(a,a) \notin (A\times A)\backslash R$ ולכן זהו יחס שאינו רפלקסיבי, ולכן לא יחס שקילות.

3. $((A\times A)\backslash R)\cup\{(a,a)|a\in A\}$.

<u>פתרון:</u>

לא בהכרח. אם נמשיך בדוגמה שלנו מסעיף 1, נקבל:

$$((A\times A)\backslash R)\cup\{(a,a)|a\in A\}=\{(1,1),(2,2),(3,3),(3,2),(2,3),(1,3),(3,1)\}$$

וזה אינו יחס שקילות מכיוון שהוא אינו טרנזיטיבי; $(2,3),(3,1)\in R$ אך $(2,1)\notin R$.

4. $R\backslash S$.

<u>פתרון:</u>

לא. יהי $a\in A$. מכיוון ש־R,S יחסי שקילות, נקבל: $(a,a)\in R,(a,a)\in S$.

לפי הגדרת הפרש, $(a,a)\notin R\backslash S$ ולכן לא רפלקסיבי, וגם לא יחס שקילות.

<u>תרגיל:</u>

יהי R יחס שקילות על קבוצה A ויהי S יחס שקילות על קבוצה B. הוכיחו שהיחס:

$$T=\{((a_1,b_1),(a_2,b_2))|(a_1,a_2)\in R,(b_1,b_2)\in S\}$$

הוא יחס שקילות על $A\times B$.

<u>פתרון:</u>

נבדוק ששלוש התכונות מתקיימות.

1. רפלקסיביות:

יהי $(a,b)\in A\times B$. מכיוון ש־R יחס שקילות על A, $(a,a)\in R$. כמו כן, מכיוון ש־S יחס שקילות על B, נקבל ש־$(b,b)\in S$.

לפי ההגדרה של T, נקבל שאכן $((a,b),(a,b))\in T$ ולכן T רפלקסיבי.

2. סימטריות:

יהי $((a_1,b_1),(a_2,b_2))\in T$. לפי הגדרת T, נקבל:

$$(a_1,a_2)\in R,(b_1,b_2)\in S$$

R, S הם יחסי שקילות (כל אחד על קבוצתו הוא) ובפרט הם סימטריים, ולכן:

$$(a_2, a_1) \in R, (b_2, b_1) \in S$$

ולפי הגדרת היחס T נקבל:

$$((a_2, b_2), (a_1, b_1)) \in T$$

ולכן T סימטרי.

3. טרנזיטיביות:

יהיו $((a_1, b_1), (a_2, b_2)), ((a_2, b_2), (a_3, b_3)) \in T$.

לפי הגדרת T, נקבל:

$$(a_1, a_2) \in R, (b_1, b_2) \in S$$

$$(a_2, a_3) \in R, (b_2, b_3) \in S$$

מכיוון ש-R, S ניהם יחסי שקילות (כל אחד על קבוצתו הוא) ובפרט הם טרנזיטיביים, נקבל:

$$(a_1, a_3) \in R, (b_1, b_3) \in S$$

ולפי הגדרת היחס T נקבל:

$$((a_1, a_3), (b_1, b_3)) \in T$$

ולכן היחס T הוא טרנזיטיבי.

היחס T שלנו הוא אכן יחס שקילות.

בתרגול עברנו בנוסף על אינדוקציה (פיבונאצ'י). אפשר למצוא את האינדוקציה הזו (ואחת נוספת) בקובץ "קצת אינדוקציה".