תרגיל 7 לינארית 2

סמסטר ב תשע"ח

תרגיל 1. הראה שהעתקה לינארית $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ המוגדרת $T(x,y) = (\frac{3x-y}{2}, \frac{3y-x}{2})$ לכסינה ומצא בסיס B כך ש$[T]_B$ אלכוסנית.

פתרון: המטריצה המייצגת לפי הבסיס הסטנדרטי היא:

$$[T]_S^S = \begin{pmatrix} 1.5 & -0.5 \\ -0.5 & 1.5 \end{pmatrix}$$

לאחר מציאת ערכים עצמיים והפעלת אלגוריתם ללכסון מטריצה נקבל כי המטריצה המייצגת את T הנה:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

כאשר B={(1,1),(1,-1)}.

תרגיל 2. הוכח כי למטריצות דומות אותו פולינום מינימלי.

פתרון:נוכיח תחילה שאם A,B דומות אז לכל פולינום f המטריצות f(A),f(B) דומות.

נסמן:$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} \dots . + a_0$. מכיוון שA וB מטריצות דומות קיימת מטריצה P הפיכה כך ש $A = P^{-1}BP$ ולכל n טבעי מתקיים $A = P^{-1}B^nP$.

f(A)=f($P^{-1}BP) = a_n(P^{-1}BP)^n + a_{n-1}(P^{-1}BP)^{n-1} \dots . + a_0 = a_n(P^{-1}B^nP) + a_{n-1}(P^{-1}B^{n-1}P) \dots . + a_0 = P^{-1}(a_nB^n + a_{n-1}B^{n-1} \dots . + a_0)P = P^{-1}f(B)P$

כמו כן, נשים לב שהמטריצה היחידה שדומה למטריצת האפס זו מטריצת האפס.

אם A,B דומות אז f(A),f(B) דומות ולכן f(A)=0 אם ורק אם f(B)=0.

כיוון שהפולינומים המאפסים מטריצות דומות הם אותם פולינומים, בפרט המינימלי המתוקן מביניהם הוא אותו אחד.

תרגיל 3. תהא A ריבועית כך שהפולינום המינימלי שלה הינו $m_A(x) = (x-1)^2$. יהא $f(x) = x^2 + 4x + 3$

הוכח כי המטריצה f(A) הפיכה.

פתרון: . $f(A) = A^2 + 4A + 3I = (A-I)^2 + 6A + 2I = 6A + I$

נוכיח ש|f(A)|≠0 ואז המטריצה f(A)הפיכה.

נניח בשלילה ש |f(A)|=0 זאת אומרת ש|6A+I|=0 <= $|A - \frac{-1}{3}I| = 0$ ואז$\frac{-1}{3}$ ערך עצמי של המטריצה אבל אינו שורש בפולינום המינימלי הנתון.

תרגיל 4. תהי A מטריצה אידמפוטנטית כלומר $A^2 = A$. מהן האפשרויות לפולינום המינימלי של A?

פתרון: השוויון $A^2 = A$ שקול לכך שהפולינום f(x)=$x^2 - x$ מאפס את המטריצה.

כיוון שהפולינום המינימלי מחלק כל פולינום המאפס את המטריצה, האפשרויות לפולינום המינימלי הן:

$$\boldsymbol{f_1(x) = x, f_2(x) = x - 1, f_3(x) = x(x-1)}$$

תרגיל 5. השתמשו בפולינום האופייני כדי לחשב פולינום מינימלי של המטריצה הבאה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

פתרון: נחשב את הפולינום האופייני. נקבל $f_A(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^2$. לאחר חישוב נקבל ש

$$m_A(x) = (x-1)(x-2)(x-3)^2$$

תרגיל 6. נגדיר העתקה לינארית $T: \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ המוגדרת על ידי $T(p(x)) = p'(x) + p(0)$. מצאו את הערכים העצמיים והוקטורים העצמיים של T וקבעו האם היא לכסינה.

פתרון: המטריצה המייצגת של T לפי הבסיס הסטנדרטי $S = \{\mathbf{1}, \mathrm{x}, \boldsymbol{x^2}, \boldsymbol{x^3}\}$ היא:

$$\mathbf{A}=[T]_S^S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

המטריצה היא מטריצה משולשית עליונה ולכן $p_T(\lambda) = \lambda^3(\lambda - 1)$. ו $\boldsymbol{\lambda}=0,1$ שני ערכים עצמיים.

נחשב מ"ע. עבור 0 נקבל:

$$N(A - 0I) = N\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} -t \\ t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R}\right\} = span\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$$

$$N(A - I) = N\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \ldots\ldots = span\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$$

ולכן המ"ע של T הם:

$$V_0 = span\{-1 + x\}$$

$$V_1 = span\{1\}$$

ולכן T אינה לכסינה כי אין בסיס של ו"ע.