פתרון תרגיל 4 אינפי 3

1) הנורמה האוקלידית הסטנדרטית מוגדרת ע"י: $\|\vec{x}\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$, והיא רציפה כסכום והרכבה של פונקציות רציפות.

2)

א. נפריך את הטענה. נבחר את הפונקציה: $f(x,y) = y$, את הנקודות $a = (1,0)$ ו-$b = (-1,0)$ ואת המסילות $\gamma_1 = (\cos \pi t\, 1, \sin \pi t)$ ו- $\gamma_2 = (\cos \pi t\, 1, -\sin \pi t)$.
מסילות אלה מקיימות את הדרוש אך לכל $t \in (0,1)$ מתקיים $\pi t \in (0,\pi)$ ולכן-
$f(\gamma_1(t)) = -\sin \pi t > -\sin \pi t = f(\gamma_2(t))$.

ב. נוכיח את הטענה. נגדיר: $g(t) = f(\gamma_1(t)) - f(\gamma_2(t))$. נשים לב שאם $f(a) = f(b)$ הטענה ברורה, ולכן נניח אי-שוויון; בה"כ, נניח ש: $f(a) < f(b)$. כעת:

$$g(0) = f(a) - f(b) < 0$$

וכן:

$$g(1) = f(b) - f(a) > 0$$

g רציפה, ולפי משפט ערך הביניים קיים $t \in [0,1]$ כך ש: $g(t) = 0$, כלומר $f(\gamma_1(t)) = f(\gamma_2(t))$.

3)

א. ברור שלא. למשל הפונקציה $f: (0,\infty) \to \mathbb{R}$ $f(x) = x$ רציפה במ"ש אבל $\frac{1}{f}(x) = \frac{1}{x}$ לא רציפה במ"ש.

ב. זה נכון. נוכיח: לכל $x, y \in X$ מתקיים

$$\left|\frac{1}{f}(x) - \frac{1}{f}(y)\right| = \left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(y)}\right| = \left|\frac{f(y) - f(x)}{f(x)f(y)}\right| \le \frac{|f(x) - f(y)|}{R^2}$$

f רציפה במ"ש ולכן לכל $\epsilon > 0$ יש $\delta > 0$ עבורו $|f(x) - f(y)| < \epsilon R^2$ ולכן $\left|\frac{1}{f}(x) - \frac{1}{f}(y)\right| < \epsilon$ וסיימנו.

ג. זה לא נכון, הדוגמא מ-ד' תעבוד.

ד. זה לא נכון, נגדיר ציה $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = x$ ו-

$$g(x) = \begin{cases} x - \lfloor x \rfloor & \lfloor x \rfloor \in 2\mathbb{Z} \\ 1 - (x - \lfloor x \rfloor) & \lfloor x \rfloor \in 2\mathbb{Z} + 1 \end{cases}$$

$\lfloor x \rfloor$ הוא החלק השלם של x (x מעוגל ללמטה) ו- $x - \lfloor x \rfloor$ הוא החלק השברי של x.
בין כל מספר זוגי $2n$ למספר האי זוגי $2n+1$ הפונקציה עולה כקו ישר בשיפוע 1,

מגובה 0 לגובה 1, ואז בין $2n+1$ ל- $2n+2$ היא יורדת כקו ישר בשיפוע 1, מגובה 1 בחזרה לגובה 0.

ידוע ש- f רציפה במ״ש, g חסומה בין 0 ל-1 והיא רציפה במ״ש כי בין שני מספרים $x<y$ קרובים מספיק (למשל, שהמרחק בניהם קטן מחצי) מתקיים ש-

אם $\lfloor x\rfloor<\lfloor y\rfloor$ אז $\lfloor y\rfloor=\lfloor x\rfloor+1$ ו- $x<\lfloor y\rfloor\le y$. ואז

$$\begin{aligned}|g(y)-g(x)| &\le |g(y)-g(\lfloor y\rfloor)|+|g(\lfloor y\rfloor)-g(x)|\\ &=|g(y)-g(\lfloor y\rfloor)|+|g(\lfloor x\rfloor+1)-g(x)|\end{aligned}$$

נחשב:

$$|g(y)-g(\lfloor y\rfloor)|=\begin{cases}|y-\lfloor y\rfloor-0| & \lfloor x\rfloor\in 2\mathbb{Z}\\ |1-(y-\lfloor y\rfloor)-1| & \lfloor x\rfloor\in 2\mathbb{Z}+1\end{cases}=y-\lfloor y\rfloor$$

בדומה

$$\begin{aligned}|g(\lfloor x\rfloor+1)-g(x)| &=\begin{cases}|1-(x-\lfloor x\rfloor)| & \lfloor x\rfloor\in 2\mathbb{Z}\\ |1-(x-\lfloor x\rfloor)-0| & \lfloor x\rfloor\in 2\mathbb{Z}+1\end{cases}\\ &=1-(x-\lfloor x\rfloor)=\lfloor y\rfloor-x\end{aligned}$$

ולכן

$$|g(y)-g(x)|\le y-\lfloor y\rfloor+\lfloor y\rfloor-x=y-x$$

אם $\lfloor y\rfloor=\lfloor x\rfloor$ אז מיד לפי ההגדרה $|g(y)-g(x)|=y-x$

בכל מקרה $|g(y)-g(x)|\le|y-x|$ ולכן g רציפה במ״ש.

לעומת זאת:

$$f\cdot g(x)=\begin{cases}x^2-x\lfloor x\rfloor & \lfloor x\rfloor\in 2\mathbb{Z}\\ x(1+\lfloor x\rfloor)-x^2 & \lfloor x\rfloor\in 2\mathbb{Z}+1\end{cases}$$

ובפרט $f\cdot g(2n)=0$ ו- $f\cdot g\left(2n+\frac{1}{n}\right)=2+\frac{1}{n^2}$ ולכן

$$\left|f\cdot g\left(2n+\frac{1}{n}\right)-f\cdot g(2n)\right|=2+\frac{1}{n^2}\to 2$$

אבל

$$\left|2n+\frac{1}{n}-2n\right|=\frac{1}{n}\to 0$$

ולכן $f\cdot g$ לא רציפה במ״ש.

ה. זה נכון. נוכיח: לכל $x,y\in X$ מתקיים

$$\begin{aligned}|f\cdot g(x)-f\cdot g(y)| &=|f(x)g(x)-f(y)g(y)|\\ &\le|f(x)g(x)-f(x)g(y)|+|f(x)g(y)-f(y)g(y)|\\ &=|g(x)-g(y)||f(x)|+|f(x)-f(y)||g(y)|\end{aligned}$$

f,g חסומות ולכן ישנו $R>0$ עבורו לכל $x\in X$ $|f(x)|,|g(x)|\le R$. בפרט

$$|f\cdot g(x)-f\cdot g(y)|\le(|g(x)-g(y)|+|f(x)-f(y)|)R$$

f,g רציפות במ״ש ולכן לכל $\epsilon > 0$ יש $\delta > 0$ עבורו

$$|f(x)-f(y)|,|g(x)-g(y)| < \frac{\epsilon}{2R}$$

ולכן $|f\cdot g(x)-f\cdot g(y)| < \epsilon$ וסיימנו.

4)

א. לא. ניקח את הפוקציה
$$f(x)=\begin{cases} k^2x-k^3 & k\le x\le k+\frac{1}{2k^2} \\ k^3+1-k^2x & k+\frac{1}{2k^2}\le x\le k+\frac{1}{k^2} \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

בתחילת כל קטע מהצורה $\left[k,k+\frac{1}{k}\right]$ יש בגרף שלה ״ראש משולש שווה שוקיים״ עם

רוחב בסיס $\frac{1}{k^2}$ וגובה $\frac{1}{2}$ בכל מקום אחר $f(x)=0$. ולכן רציפה

שטח כל המשולש ב- $\left[k,k+\frac{1}{k}\right]$ הוא $\frac{1}{4k^2}$ ובפרט לכל $k\in\mathbb{N}$ $\int_k^{k+1}|f(x)|dx=\frac{1}{4k^2}$

לכל k $\left|f\left(k+\frac{1}{2k^2}\right)-f(k)\right|=|1-0|=1$ אבל $\left|k+\frac{1}{2k^2}-k\right|=\frac{1}{2k^2}\to 0$

ולכן f לא רציפה במ"ש.

הפונקציה רציפה אבל לא רציפה במ״ש כי המרחק בין $f\left(k+\frac{1}{2k}\right)-f(k)$

$$f_n(x)=\begin{cases} f(x) & x\le n \\ 0 & n<x \end{cases}$$

$$\|f-f_n\|_1=\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)-fn(x)|dx=\int_n^{\infty}|f(x)|dx=\sum_{k=1}^{\infty}\int_k^{k+1}|f(x)|dx$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2}\to 0$$

כי זה נזב של טור מתכנס.

זו סדרה מצד שני כל f_n היא רציפה במ״ש כי היא רציפה ושונה מ-0 רק בתוך הקטע הסופי $[0,n]$.

ב. כן. אם מתקיים $\|f-f_n\|_\infty\to 0$ לכל $\epsilon>0$ יש N כך שלכל $n\ge N$ ולכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים $|f(x)-f_n(x)|\le\|f-f_n\|_\infty<\frac{\epsilon}{3}$. בנוסף ישנו $\delta>0$ עבורו לכל $x,y\in\mathbb{R}$ עם $|x-y|<\delta$ מתקיים $|f_n(x)-f_n(y)|<\frac{\epsilon}{3}$ ואז

$$|f(x)-f(y)|\le|f(x)-f_n(x)|+|f_n(x)-f_n(y)|+|f_n(y)-f(y)|<\frac{\epsilon}{3}$$