הוכחה לשאלת הבונוס בתורת החבורות

מגיש: אלעד יניר

הגדרה: תהיינה מילים w, v. מתקיים $v \sim w$ אם ורק אם ניתן להגיע מהמילה v למילה w על ידי הוספה או צמצום של צמדי אותיות מהצורה $x_i x_i^{-1}$ או $x_i^{-1} x_i$. ניתן להיווכח בקלות ש־$\sim$ הוא יחס שקילות.

טענה: בכל מחלקת שקילות של יחס השקילות שהוגדר לעיל יש נציג מצומצם יחיד.

הוכחה: תחילה נוכיח שלכל מילה יש צמצום אחד ויחיד. לאחר מכן נוכיח שהרחבות וצמצומים של מילה לא משנים את הצמצום היחיד שלה, ובכך למעשה נוכיח שלכל המילים במחלקת שקילות מסויימת יש צמצום משותף.

הגדרה: מילה v תיקרא "צמצום מסדר ראשון" של w אם ניתן להגיע מ־w ל־v על ידי הסרה של צמד אותיות **יחיד** מהצורה של $x_i x_i^{-1}$ או $x_i^{-1} x_i$.

כעת נוכל להתחיל בהוכחה. את החלק הראשון נוכיח באינדוקציה.

כהכנה לאינדוקציה, נוכיח טענת עזר קצרה: תהא מילה w. אזי לכל v, u צמצומים שונים מסדר ראשון של w יש צמצום משותף מסדר ראשון.

נחלק למקרים. אם כל אחד מהצמצומים מתבצע על חלק אחר של המילה (כלומר אין הם עושים שימוש באות משותפת), אזי נוכל להפעיל על v את הצמצום שבאמצעותו יצרנו את u ועל u את הצמצום שבאמצעותו נוצר v, ונקבל צמצום משותף מסדר ראשון.

אם שני הצמצומים עושים שימוש באות משותפת, אזי הם שווים זה לזה, בסתירה להנחה. (כי הצמצומים פועלים על אזור במילה שהוא מהצורה $b^{-1}bb^{-1}$, ולכן בהכרח את הצירוף הזה יחליף אחד הקצוות, לא משנה מאיזה צד נבחר לצמצם).

עכשיו נוכיח באינדוקציה שלכל מילה יש צמצום אחד ויחיד:

בסיס האינדוקציה:

נטפל במילים שבהן שלוש אותיות ומטה.

- אפס אותיות: תהא w מילה מגודל 0. אזי ל־w צמצום יחיד, והוא היא־עצמה.
- אות אחת: תהא w מילה מגודל 1. אזי ל־w צמצום יחיד, והוא היא־עצמה (מפני שתהליך הצמצום עושה שימוש בשתי אותיות לפחות).
- שתי אותיות: תהא w מילה מגודל 2. אזי, אם w היא מהצורה של $x_i x_i^{-1}$ או $x_i^{-1} x_i$, אזי יש לה צמצום יחיד, והוא המילה הריקה. אם w אינו מהצורה של אות והיפוכה, אזי גם כאן יש ל־w צמצום יחיד, w.

- שלוש אותיות: תהא w מילה מגודל 3. אזי, אם יש ב־w צמד של אות והיפוכה, ניתן יהיה לצמצם אותה למילה מגודל 1, שהיא אחד הקצוות של המילה המקורית. זהו, כמובן, הצמצום היחיד שלה (אם יש שתי אפשרויות צמצום ב־w נקבל ש־w היא מהצורה $a^{-1}aa^{-1}$, ואז, כמובן, נקבל ששני הצמצומים זהים). אם אין ב־w צמד של אות והיפוכה, אזי w היא הצמצום של עצמה.

שלב האינדוקציה:

נניח שלכל המילים שאורכן l ומטה קיים צמצום יחיד ($l > 3$). נביט במילה w שאורכה $l+1$. אם אין ל־w צמצומים מסדר ראשון, אזי, מטבע הדברים, w מצומצמת. גם אם יש ל־w צמצום יחיד מסדר ראשון, הרי שלו, מהנחת האינדוקציה, יש צמצום יחיד, ולכן זהו גם הצמצום היחיד של w. לכן, נניח של־w יש יותר מצמצום יחיד מסדר ראשון. נקח x, y שני צמצומים מסדר ראשון של w. אזי, מטענת העזר, קיימת מילה v שהיא צמצום מסדר ראשון גם של x וגם של y. לכן, מהנחת האינדוקציה, יש לה צמצום יחיד g ($|v| < l$). גם ל־x, y יש צמצום יחיד, וכצמצום של v, g הוא הצמצום הזה.

קיבלנו שלכל הצמצומים מסדר ראשון של w יש את אותו הצמצום. לכן זהו גם הצמצום היחיד של w.

$\square$

הוכחנו שלכל מילה יש צמצום אחד ויחיד. כעת נעבור לחלק השני – נוכיח שמכאן נובע שלכל המילים במחלקת השקילות $[w]_\sim$ יש צמצום יחיד ומשותף.

הגדרה: תהיינה מילים u, w. אזי w תיקרא "הרחבה מסדר ראשון" של u אם u היא צמצום מסדר ראשון של w.

נוכיח שהרחבה מסדר ראשון משמרת צמצום. תהיינה מילים w, u. כך ש־u היא הרחבה מסדר ראשון של w. אזי w היא צמצום מסדר ראשון של u, ולכן הצמצום היחיד שלה הוא גם צמצום של u. אבל הוכחנו שלכל מילה יש צמצום אחד ויחיד, ולכן הצמצום של w הוא גם הצמצום של u.

כעת נוכל לסיים את ההוכחה.

תהא $u \in [w]_\sim$. אזי, על פי ההגדרה, ניתן להגיע מ־w ל־u על ידי רצף סופי של צמצומים מסדר ראשון והרחבות מסדר ראשון. אבל הוכחנו שלא צמצומים מסדר ראשון ולא הרחבות מסדר ראשון משפיעים על זהות הצמצום היחיד, ולכן הצמצום היחיד של u זהה לצמצום היחיד של w.

$\blacksquare$