תרגול 10 – אדם צ'פמן

משתנים רציפים

משתנה רציף X הוא משתנה שיכול להיות כל מספר ממשי שהוא, לרבות שברים ומספרים אי-רציונליים.

את ההתפלגות של משתנה כזה מתארים על-ידי פונקציית צפיפות $f_X(x) : R \to R_0^+$:

$$P(a \le X \le b) = \int_a^b f_X(x)dx$$

פונקציית הצפיפות צריכה לקיים $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$.

דוגמא:

אם X מתפלג אחיד בין a לבין b אז פונקציית הצפיפות שלו היא

$$f_X(x) = \begin{cases} c & a \le x \le b \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

עבור איזשהו קבוע c. את הקבוע הזה ניתן למצוא בעזרת השוויון $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$:

$$1 = \int_a^b cdx = c \cdot (b - a)$$

$$c = \frac{1}{b - a}$$

פונקציית ההצטברות

$$F_X(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$$

לפי משפט ניוטון-לייבניץ, פונקציית ההצטברות היא הפונקציה הקדומה של פונקציית הצפיפות, כלומר

$$F_X'(x) = f_X(x)$$

דוגמא:

אם X מתפלג אחיד בין a לבין b אז קיבלנו קודם שפונקציית הצפיפות שלו היא

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a \le x \le b \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

אז עבור $x < a$ מתקיים $F_X(x) = 0$, עבור $a \le x \le b$ מתקיים

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{a}^{x} \frac{1}{b-a} dt = \frac{x-a}{b-a}$$

ועבור $x > a$ מתקיים $F_X(x) = 1$.

תוחלת ושונות

את התוחלת של משתנה רציף מגדירים להיות

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$$

ואת השונות מחשבים כרגיל לפי

$$V(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2$$

כאשר

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx$$

דוגמא:

נביט בהתפלגות אחידה כמו קודם, דהיינו

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a \le x \le b \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

נחשב את התוחלת

$$E(X) = \int_{a}^{b} \frac{x}{b-a} dx = \frac{x^2}{2(b-a)} |_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2}$$

יצא לנו שבהתפלגות אחידה, התוחלת היא הממוצע בין קצוות הקטע $[a, b]$.

$$E(X^2) = \int_{a}^{b} \frac{x^2}{b-a} dx = \frac{x^3}{3(b-a)} |_a^b = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} = \frac{(b-a)(b^2+ab+a^2)}{3(b-a)} = \frac{b^2+ab+a^2}{3}$$

$$V(X)=\frac{b^2+ab+a^2}{3}-\frac{b^2+2ab+a^2}{4}=\frac{b^2-2ab+a^2}{12}=\frac{(b-a)^2}{12}$$

שאלה:

נתון משתנה רציף X עם פונקציית צפיפות $f_X(x)$. מצאו ביטוי לפונקציית הצפיפות של $Y=X^2$.

תשובה:

לכל מספר y מתקיים $Y<y \Leftrightarrow X^2<y \Leftrightarrow -\sqrt{y}<X<\sqrt{y}$ ולכן

$$F_Y(y)=P(Y<y)=P\left(-\sqrt{y}<X<\sqrt{y}\right)=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f_X(x)dx$$

נגזור את שני האגפים לפי y ונקבל

$$f_Y(y)=f_X\left(\sqrt{y}\right)\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}-f_X\left(-\sqrt{y}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2\sqrt{y}}\right)=\frac{f_X\left(\sqrt{y}\right)+f_X\left(-\sqrt{y}\right)}{2\sqrt{y}}$$

שאלה:

נתונה פונקציית צפיפות

$$f_X(x)=\begin{cases} cx^n & 0\le x\le 1 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

א. מצאו את c.

ב. מצאו ביטוי ל$P(X<x)$ לכל $0<x<1$.

תשובה:

את c מוצאים על-ידי השוויון $1=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx$:

$$1=\int_0^1 cx^n dx=\frac{cx^{n+1}}{n+1}|_0^1=\frac{c}{n+1}$$

$$c=n+1$$

$$P(X<x)=\int_x^\infty f_X(t)dt=\int_x^1 (n+1)t^n dt=t^{n+1}|_x^1=1-x^{n+1}$$

שאלה:

נתונה פונקציית צפיפות

$$f_X(x)=\begin{cases} ax+bx^2 & 0\le x\le 1 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

ונתון ש$E(X)=0.6$.

א. מצאו את $P(X<\frac{1}{2})$.

ב. מצאו את $V(X)$.

תשובה:

קודם כל, צריך למצוא את a וb.

אותם אפשר למצוא אותם על-ידי מערכת המשוואות המתקבלת מ$E(X)=0.6$ ו$1=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx$.

המשוואה $1=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx$ היא

$$1=\int_0^1 (ax+bx^2)dx=\frac{ax^2}{2}+\frac{bx^3}{3}|_0^1=\frac{a}{2}+\frac{b}{3}$$

והמשוואה $E(X)=0.6$ היא

$$0.6=\int_0^1 (ax^2+bx^3)dx=\frac{ax^3}{3}+\frac{bx^4}{4}|_0^1=\frac{a}{3}+\frac{b}{4}$$

הפתרון למערכת המשוואות הוא $a=3.6, b=-2.4$.

$$P\left(X<\frac{1}{2}\right)=\int_0^{\frac{1}{2}} 3.6x-2.4x^2dx=1.8x^2-0.8x^3|_0^{\frac{1}{2}}=0.45-0.1=0.35$$

$$E(X^2)=\int_0^1 (3.6x^3-2.4x^4)dx=0.9x^4-0.48x^5|_0^1=0.42$$

$$V(X)=E(X^2)-\left(E(X)\right)^2=0.42-0.36=0.08$$