טופולוגיה אלגברית 1 - תרגיל בית 12

שאלה 1

הראה שאם ל-B יש מרחב כיסוי פשוט קשר, אז B מקיים את התכונה הבאה: לכל נקודה ב-B יש סביבה U המקיימת שכל לולאה ב-U נול-הומוטופית ב-B.

הוכחה:

נניח של-B יש מרחב כיסוי פשוט קשר, נסמנו E, עם העתקת כיסוי $p:E\to B$.

תהי $x\in B$. p העתקת כיסוי, ולכן קיימת ל-x "סביבה טובה" U (כלומר $p^{-1}(U)=\bigcup_{\alpha\in J} U_\alpha$ ⊛, $p|_{U_\alpha}:U_\alpha\to U$ הומיאומורפיזם).

נראה שזו הסביבה הדרושה.

תהי $y\in U$, ותהי φ לולאה ב-U המתחילה ומסתיימת ב-y.

נבחר $e\in p^{-1}(y)$; לכן קיימת סביבה U_0 באיחוד ⊛ כך ש-$e\in U_0$ ו-$p|_{U_0}:U_0\to U$ הומיאומורפיזם. לכן יש מסילה Ψ ב-U_0 כך ש-$\varphi=p\circ\Psi$, וכן Ψ סגורה.

אבל E פשוט קשר, ולכן כל לולאה סגורה היא נול-הומוטופית; בפרט, גם Ψ נול-הומוטופית. מכאן ש-φ תהיה נול-הומוטופית (הומוטופיה ב-E משרה הומוטופיה ב-B, גם ביחס לקצוות).

שאלה 2

יהיו $p_1: E_1 \longrightarrow B_1$ ו- $p_2: E_2 \longrightarrow B_2$ מרחבי כיסוי.

הראה שגם $p_1 \times p_2: E_1 \times E_2 \longrightarrow B_1 \times B_2$ מרחב כיסוי.

הוכחה:

ראשית, $p_1 \times p_2$ רציפה, כמובן.

יהי $(x_1, x_2) \in B_1 \times B_2$. נניח ש- U סביבה טובה של x_1 וש- V סביבה טובה של x_2. אזי נוכיח כי $U \times V$ סביבה טובה של (x_1, x_2).

$$(p_1 \times p_2)^{-1}(U, V) = p_1^{-1}(U) \times p_2^{-1}(V)$$

לפי בחירת U ו- V, קיימות $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ פתוחות ב- E_1 ו- $\{V_\beta\}_{\beta \in J'}$ פתוחות ב- E_2 כך ש- $p^{-1}|_{U_\alpha}: U_\alpha \longrightarrow U$ ו- $p^{-1}|_{V_\beta}: V_\beta \longrightarrow V$ הומיאומורפיזמים, וגם

$$U = \bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha \quad , \quad V = \bigcup_{\beta \in J'} V_\beta$$

לכן,

$$(p_1 \times p_2)^{-1}(U, V) = \bigcup_{\substack{\alpha \in J \\ \beta \in J'}} \underbrace{(U_\alpha \times V_\beta)}_{\text{פתוחה}}$$

נותר רק להראות שלכל $\alpha \in J$ ולכל $\beta \in J'$, $(p_1 \times p_2)|_{U_\alpha \times V_\beta}: U_\alpha \times V_\beta \longrightarrow U \times V$ הומיאומורפיזם.

זה ברור, כי $p_1|_{U_\alpha}: U_\alpha \longrightarrow U$ ו- $p_2|_{V_\beta}: V_\beta \to V$ הומיאומורפיזמים.

שאלה 3

הראה ש-$\mathbb{R}^2$ מרחב כיסוי של הטורוס. מצא מרחבי כיסוי נוספים של הטורוס.

הוכחה:

אנו יודעים ש-$\mathbb{R}$ מרחב כיסוי של S^1, וש-$T \cong S^1 \times S^1$.

לפי השאלה הקודמת, $\mathbb{R}^2$ מרחב כיסוי של T.

מרחבים נוספים: $S^1 \times \mathbb{R}$, $\mathbb{R} \times S^1$, T...

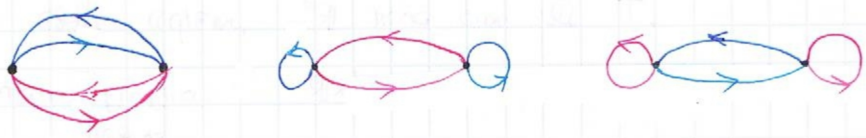
באופן כללי, אפשר גם $p_1 \times p_2 : S^1 \times S^1 \longrightarrow S^1 \times S^1$ כש-p_1 = ליפוף n פעמים (=כיסוי מסדר n, והוא יחיד) ו-p_2 = ליפוף m פעמים.

שאלה 4

מצאו את כל מרחבי הכיסוי (הקשורים) מסדר 2 ו-3 של $S^1 \vee S^1$ (מרחב 8).

פתרון:

מרחבי כיסוי מסדר 2 -



מרחבי כיסוי מסדר 3 - מתוארים בשרטוטים: