תרגיל בית 5-פתרון
מבני נתונים ואלגוריתמים 88-280
סמסטר א׳ תשע״ט

שאלה 1

נתון גרף לא מכוון $G=(V,E)$ המיוצג ע"י רשימות שכנות, וצומת $s \in V$. לכל קשת $e \in E$ יש משקל שלם $w(e)$ (חיובי או שלילי). תארו אלגוריתם יעיל ככל האפשר המחשב, לכל צומת $v \in V$, את המשקל המינימלי של מסלול מ- s ל- v בעל <u>מספר זוגי</u> של קשתות. (הניחו שב- G אין מעגלים שליליים.)

<u>יעילות</u>: $O(|E|+|V|\log|V|)$ כמו דיקסטרה או אם לא מניחים שהקשתות אי-שליליות אז $O(|V||E|)$ כמו בלמן פורד

<u>הערה</u>: במקרה הזה היתה הנחיה מיוחדת שקשת שעוברים עליה פעם בכל כיוון היא מעגל באורך 2. לכן אין למעשה קשתות בעלות משקל שלילי.

<u>אלגוריתם</u>:
נסתכל על גרף דו-צדדי שבו לכל צומת מהגרף המקורי יש עותק בכל צד. עבור כל זוג צמתים i,j משני צדדים שונים, יש בינהם קשת אם בגרף המקורי יש קשת בין שני הצמתים שהם מייצגים. משקל קשת זאת זהה למשקל הקשת מהגרף המקורי. בגרף זה נמצא את המרחקים מעותק אחד של הצומת s לכל יתר הצמתים שבצד זה. אלה המרחקים הדרושים.

<u>הסבר</u>:
מכיון שהגרף שנבנה הוא דו-צדדי אז כל המסלולים בעלי אורך זוגי שמתחילים בצד אחד מסתיימים באותו צד. לכל מסלול בעל אורך זוגי בגרף המקורי, יש מסלול מתאים בגרף זה. כל מסלול בגרף זה מייצג מסלול בגרף המקורי.
מכיון שבגרף המקורי אין מעגלים בעלי אורך שלילי, אז גם בגרף הדו-צדדי אין מעגלים בעלי אורך שלילי. מספר צמתי הגרף הוא כפליים מספר צמתי הגרף המקורי ומספר קשתות הגרף הוא כפליים מספר קשתות הגרף המקורי. מכאן מתקבלת היעילות הרשומה.

שאלה 2

נתון גרף מכוון $G=(V,E)$ בו הקשתות צבועות ב-3 צבעים: אדום כחול וירוק.

1. כתבו אלגוריתם המקבל שני קודקודים ומכריע האם יש מסלול בין הקודקודים כך שכל שתי קשתות סמוכות במסלול הן בצבעים שונים.
2. כתבו אלגוריתם המקבל שני קודקודים ומכריע האם יש מסלול בין הקודקודים העובר דרך קשתות מכל הצבעים.

על האלגוריתמים לרוץ ב-$O(|V|+|E|)$ פעולות. הוכיחו את נכונות האלגוריתמים.

פיתרון סעיף 1

אפשר לבצע DFS/BFS מתוחכם בו כל קודקוד יכול להיכנס למחסנית לכל היותר 3 פעמים (רק אם הגענו אליו מקשתות בשלוש צבעים שונים). נתאר כאן פיתרון שקול לפיתרון הזה, אך יותר אלגנטי.

סימון: $C = \{R, G, B\}$ תהייה קבוצת הצבעים של הקשתות.

פיתרון: נגדיר גרף חדש G' באופן הבא: קבוצת הקודקודים תהייה איחוד של שלושה עותקים של V: $V' = V_R \cup V_G \cup V_B$ באשר $V_c = \{v_c | v \in V\}$ לכל $c \in C$ (הסימון v_c הוא סימון פורמלי). הקשתות יוגדרו באופן הבא: לכל $(u, v) \in E$ בצבע c תהייה קשת מ-u_x ל-v_c לכל $c \neq x \in C$. (לדוגמא, אם (u, v) אדומה אז תהיינה קשתות מ-u_B ו-u_G אל v_R.) נסמן את קבוצת הקשתות החדשות ב-E'.
[שימו לב שלפי ההגדרה, קשתות שמובילות ל-v_c ב-G' מגיעות מקשתות בצבע c ב-G.]

נתאר את האלגוריתם (קלט: הגרף G ושני קודקודים u, v):

1. בנה את הגרף $G' = (V', E')$.
2. עבור $c \in \{R, G\}$:
   a. בצע BFS ב-G' שמתחיל מקודקוד u_c. אם הגענו לאחד מהקודקודים v_R, v_B, v_G:
      i. החזר שקיים מסלול כנדרש
3. החזר שאין מסלול כנדרש.

בגרף G' יש $3|V|$ קודקודים ו-$2|E|$ קשתות ולכן בנייתו דורשת $O(|V| + |E|)$ פעולות. מאותה סיבה, ביצוע BFS על G' עולה $O(3|V| + 2|E|) = O(|V| + |E|)$ פעולות. אנו עושים 2 BFS-ים כאלה ועוד מספר קבוע של פעולות ולכן סך כל העבודה היא $O(|V| + |E|)$.

האלגוריתם מחזיר שיש מסלול כנדרש אם"ם יש מסלול בין אחד מהקודקודים $\{u_R, u_G\}$ אל אחד מהקודקודים $\{v_R, v_G, v_B\}$. לכן, <u>כדי להוכיח נכונות</u> מספיק להראות שהנ"ל מתקיים אם"ם קיים מסלול מ-u ל-v בו קשתות סמוכות הן בצבעים שונים.

<u>נניח ש-$u = u^{(0)} \to u^{(1)} \to \cdots \to u^{(t)} = v$ מסלול ב-G</u> בו כל שתי קשתות סמוכות בצבעים שונים. נסמן לכל $i > 1$: $c_i = Color(u^{(i-1)}, u^{(i)})$, אזי לפי הגדרת E' יש קשת מ-$u_{c_i}^{(i)}$ ל-$u_{c_{i+1}}^{(i+1)}$ ב-G' (כי $c_{i+1} \neq c_i$) לכל $1 < i < t$. בנוסף, יש קשת מ-$u_c^{(0)}$ אל $u_{c_1}^{(1)}$ לכל $c \neq c_1$. תמיד קיים $c \in \{R, G\}$ כך ש-$c \neq c_1$ ולכן קיים מסלול ב-G' מאחד מהקודקודים $\{u_R, u_G\}$ אל אחד מהקודקודים $\{v_R, v_G, v_B\}$ (המסלול הוא $u_c = u_c^{(0)} \to u_{c_1}^{(1)} \to \cdots \to u_{c_t}^{(t)} = v_{c_t}$).

<u>נניח שיש מסלול ב-G':</u> $u_{c_0} = u_{c_0}^{(0)} \to u_{c_1}^{(1)} \to \cdots \to u_{c_t}^{(t)} = v_{c_t}$. אזי מהגדרת E' נובע שלכל $0 \leq i < t$ מתקיים $(u^{(i)}, u^{(i+1)}) \in E$, $Color(u^{(i)}, u^{(i+1)}) = c_{i+1}$ ו-$c_i \neq c_{i+1}$. לכן, $u = u^{(0)} \to u^{(1)} \to \cdots \to u^{(t)} = v$ הוא מסלול ב-G בו קשתות סמוכות הן בצבעים שונים.

הערה: ניתן להכליל את הפיתרון ל-k צבעים כך שיעבוד ב-$O\big(k(|V| + |E|)\big)$ פעולות.

פיתרון סעיף 2

שוב, במקום BFS/DFS מתוחכם, נמיר את הבעיה לבעיה בגרף אחר.

סימון: $C = \{R, G, B\}$ תהייה קבוצת הצבעים של הקשתות.

נגדיר גרף חדש $G' = (V', E')$: הקבוצה V' תורכב מ-8 עותקים של V: $V' = \cup_{X \subseteq C} V_X$ כאשר $V_X = \{v_X | v \in V\}$ (הסימון v_X הוא פורמלי). הקשתות יוגדרו באופן הבא: אם $(u, v) \in E$ בצבע c ו- $X \subseteq C$, אז $\left(u_X, v_{X \cup \{c\}}\right) \in E'$. [אינטואיציה: האינדקס X ב-v_X זוכר באילו צבעים ביקרנו בדרך ל-v.]

האלגוריתם (קלט: הגרף G ושני קודקודים u, v):

1. בנה את G' מ-G.
2. בצע BFS ב-G' מהקודקוד u_ϕ. אם הגענו אל $v_{\{R,G,B\}}$ החזר שיש מסלול כדרוש, אחרת החזר שאין מסלול כנדרש.

בגרף G' יש $8|V|$ קודקודים ו-$8|E|$ קשתות ולכן בנייתו דורשת $O(|V| + |E|)$ פעולות. מאותה סיבה, ביצוע BFS על G' עולה $O(8|V| + 8|E|) = O(|V| + |E|)$ פעולות. סה"כ קיבלנו שהאלגוריתם מבצע $O(|V| + |E|)$ פעולות.

כדי להוכיח שהאלגוריתם עובד צריך להראות שקיים מסלול מ-u ל-v העובר דרך קשתות מכל הצבעים *אם"ם* קיים ב-G' מסלול מ-u_ϕ ל-$v_{\{R,G,B\}}$.

<u>נניח שקיים מסלול $u = u^{(0)} \to u^{(1)} \to \cdots \to u^{(t)} = v$ העובר בקשתות בכל הצבעים</u>. נסמן $c_i = Color\left(u^{(i-1)}, u^{(i)}\right)$ ונגדיר $X_i = \{c_1, c_2, \dots, c_i\} = X_{i-1} \cup \{c_i\}$ ($X_0 = \phi$). אזי $X_t = \{R, G, B\}$. לפי הגדרת E', $\left(u^{(i-1)}_{X_{i-1}}, u^{(i)}_{X_i}\right) \in E'$ לכל $0 < i \le t$ ולכן יש מסלול מ-$u_\phi = u^{(0)}_{X_0}$ אל $u^{(t)}_{X_t} = u^{(t)}_{\{R,G,B\}} = v_{\{R,G,B\}}$, כדרוש.

<u>נניח שיש מסלול</u> $v_{\{R,G,B\}} = u^{(t)}_{X_t} \to \cdots \to u^{(1)}_{X_1} \to u^{(0)}_{X_0} = u_\phi$ ב-G'. אזי לכל $0 \le i < t$ מתקיים $\left(u^{(i)}, u^{(i+1)}\right) \in E$ ו-$X_{i+1} = X_i \cup \left\{Color\left(u^{(i)}, u^{(i+1)}\right)\right\}$. לכן ב-$G$ קיים המסלול, $u = u^{(0)} \to u^{(1)} \to \cdots \to u^{(t)} = v$. נראה שהוא עובר בקשתות מכל הצבעים. נסמן $c_i = Color\left(u^{(i)}, u^{(i+1)}\right)$. אזי $\{c_0, c_1, \dots, c_{i-1}\} = X_0 \cup \{c_0, c_1, \dots, c_{i-1}\} = \cdots = X_{t-1} \cup \{c_{i-1}\} = X_t = \{R, G, B\}$ ולכן לכל $c \in \{R, G, B\}$ קיים $0 \le i < t$ כך ש-$c = c_i = Color\left(u^{(i)}, u^{(i+1)}\right)$. כדרוש.

הערה: אפשר להכליל את הפיתרון ל-k צבעים ואז הסיבוכיות תהייה $O\left(2^k(|V| + |E|)\right)$.

תרגיל 3. נתון גרף $G = (V, E)$ ופונקציית משקל $w: E -> \{1,2,3,4,5\}$. הציעו אלגוריתם המוצא את המסלול הקצר ביותר בין שני קודקודים בעזרת אלגוריתם BFS. רמז: יש ליצור גרף חדש.

תרגיל 4. נתון גרף חסר מעגלים G=(V,E) ופונקציית משקל w. משקל כל הקשתות אי-שלילי, מלבד הקשתות היוצאות מנוקדת המקור s, שם יכולות להיות קשתות עם משקל שלילי. הוכח או הפרך: אלגוריתם דייקסטרה מחשב נכון את המרחק מ s לכל קודקוד t בגרף.

תרגיל 5. נתון גרף מכוון $\mathrm{G} = (\mathrm{V}, \mathrm{E})$ עם פונקציית משקל $w: E -> \mathbb{R}$. כמו כן, בגרף אין מעגלים שליליים. יהיה קודקוד s∈V כך שלכל קודקוד v∈V קיים מסלול קצר ביותר המשתמש לכל היותר ב m קשתות. תארו אלגוריתם שרץ בזמן $\mathrm{O}(\mathrm{m}|\mathrm{E}|)$ ומוצא את מסלולים קצרים ביותר מ s לכל v∈V.

4. תיקון לשאלה: הגרף מכוון.

הוכחה: תחילה נציין שהגרף חסר מעגלים, ובפרט אין בגרף מעגל בעל משקל שלילי, ולכן ניתן לחשב את המסלול הקצר ביותר לגרף הנ"ל.

על מנת להראות שהאלגוריתם עובד, נראה שהמרחק לפי אלגוריתם דייקסטרה הוא אכן המרחק המינימלי לכל קודקוד $v\in V$ כאשר אנו מוסיפים את הקודקוד לקבוצה S (הקבוצה של הקודקודים שכבר עשינו הקלה דרכם).

נניח s,....u,v הוא המסלול הקצר ביותר בין s לv כך שu הוא הקודקוד שקודם לv במסלול. נרצה לוודא שu∈S. אם u=s אזי בטוח שu∈S.עבור כל שאר הקודקודים הגדרנו שהקודקוד הבא שיכנס לS יהיה הקודקוד שהכי קרוב לs אבל לא בS.כיוון ש d[v]=d[u]+w(u,v) ומתקיים שw(u,v)>0 עבור כל הקודקודים מלבד אולי הקודקודים שיוצאים מהמקור, u בהכרח בS כיוון ש u יותר קרוב לs.

5.

תיאור האלגוריתם:

נריץ את בלמן פורד,אך במקום לבצע |V|-1 איטרציות בלולאה, נבצע רק m איטרציות.

בנוסף, ניתן לוותר על שלב בדיקת קיום מעגלים שליליים מכוונים- שכן נתון לנו שאין מעגלים כאלה.

הוכחת נכונות:

באיטרציה הראשונה של הלולאה באלגוריתם נמצא את המסלולים הקצרים ביותר במרחק קשת מ-S.

באיטרציה השנייה מתקיימת הקלה משפרת לקודקודים שנמצאים במרחק 2 קשתות לכל היותר מ- s.

כך ממשיכים עד האיטרציה ה-m.

לאחר איטרציה הנ"ל לא נשפר מסלול, כיוון שנתון שלכל קודקוד מסלול הקצר ביותר מ- s מכיל לכל היותר m קשתות.

זמן ריצה:

כל איטרציה הלולאה עוברת על כל הקשתות, מבצעים m אטרציות ולכן סה"כ נקבל O(m*|E|).

3. כיוון להוכחה:

נחליף כל קשת ממשקל i במסלול פשוט שאורכו i שמשקל כל קשת בו היא 1.על הגרף הזה נריץ BFS.