משוואות ליניאריות עם מקדמים אנליטיים (מסדר שני)

תזכורת

משוואה לינארית הומוגנית עם מקדמים אנליטיים מסדר שני היא משוואה מהצורה:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

כאשר p,q אנליטיים בסביבה של x_0.

עפ"י משפט, הפתרונות הם גם כן אנליטיים, לכן ניתן להציב:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

ולחשב את המקדמים a_n ע"י רקורסיה.

a_0, a_1 נקבעים ע"י תנאי ההתחלה:

$$y(x_0) = a_0$$
$$y'(x_0) = a_1$$

■

דוגמה

$$\boxed{y'' + e^x y = 0}$$

המקדמים $0, e^x$ אנליטיים עם רדיוס התכנסות ∞.

מתקיים:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

נציב:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

לכן:

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n$$

מתקיים:

$$e^x y = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{j=0}^{n} \frac{a_j}{(n-j)!}$$

נציב במשוואה:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+1)(n+2)a_{n+2} + \sum_{j=0}^{n}\frac{a_j}{(n-j)!}\right]\cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 0\cdot x^n$$

נשווה מקדמים של x^n, ונקבל:

$$a_{n+1} = -\frac{\sum_{j=0}^{n}\frac{a_j}{(n-j)!}}{(n+1)(n+2)}$$

נוסחת הרקורסיה שמתקבלת די מסובכת, אך בכל זאת ניתן לחשב את המקדמים על לדיוק הרצוי, בהינתן מחשב חזק מספיק.

■

משואת לג'נדר

$$\boxed{(1-x^2)y'' - 2xy' + cy = 0 \quad , \quad c\in\mathbb{R}}$$

המקרה המעניין ביותר הוא כאשר $c = k(k+1)$ עבור $k\in\mathbb{Z}$.

המקדמים $\frac{c}{1-x^2}, -\frac{2x}{1-x^2}$ אנליטיים עם רדיוס התכנסות 1.

לכן, הפתרונות יהיו אנליטיים בסביבה של 0, אך לא מובטחים פתרונות אנליטיים מעבר לרדיוס 1.

נציב:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

לכן:

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n$$

מתקיים:

$$-2xy' = \sum_{n=0}^{\infty} -2n a_n x^n$$

$$(1-x^2)y'' = 2a_2 + 6a_3 x + \sum_{n=2}^{\infty} \left[\overbrace{(n+1)(n+2)a_{n+2}}^{y''} - \overbrace{(n-1)na_n}^{-x^2 y''} \right] \cdot x^n$$

נציב במשוואה, ונשווה את המקדמים של x^n:

$$\begin{array}{llcl}
\boldsymbol{x^0} & 2a_2 + ca_0 & = & 0 \\
 & a_2 & = & -\frac{c}{2} a_0 \\
\boldsymbol{x^1} & 6a_3 - 2a_1 + ca_1 & = & 0 \\
 & a_3 & = & \frac{(2-c)a_1}{6} \\
\forall \boldsymbol{2 \le n : x^n} & (n+1)(n+2)a_{n+2} - n(n-1)a_n - 2na_n + ca_n & = & 0 \\
 & (n+1)(n+2)a_{n+2} - n(n+1)a_n + ca_n & = & 0 \\
 & a_{n+2} & = & \frac{(n(n+1)-c)}{(n+1)(n+2)} a_n
\end{array}$$

כאשר $c = k(k+1)$, <u>קיים</u> פתרון שהוא פולינום מדרגה k.

■

משוואות לינאריות עם מקדמים "כמעט" אנליטיים (מסדר שני)

משוואת אוילר

$$\boxed{ax^2y'' + bxy' + cy = 0 \quad , \quad a, b, c \in \mathbb{R}}$$

סביר לחפש פתרון מהצורה:

$$y = x^\alpha \quad , \quad 0 \neq \alpha \in \mathbb{R}$$

נציב:

$$y = x^\alpha$$

לכן:

$$y' = \alpha x^{\alpha-1}$$

$$y'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$$

נציב במשוואה:

$$a\alpha(\alpha-1)x^\alpha + b\alpha x^\alpha + cx^\alpha = 0$$

לכן:

$$a(\alpha^2-\alpha) + b\alpha + c = 0$$

משוואה זו נקראת **משוואת האינדקס**.

כעת, קיימים שלושה מקרים אפשריים:

1. **שני שורשים ממשיים שונים**:
   הפתרון הכללי:

$$y = c_1x^{\alpha_1} + c_2x^{\alpha_2}$$

2. **שורש ממשי אחד כפול**:
   הפתרון הכללי:

$$y = c_1x^\alpha + c_2x^\alpha \log x$$

3. **שני שורשים מרוכבים $\boldsymbol{\alpha = \beta \pm \omega i}$**:
   הפתרון הכללי:

$$y = x^\beta(c_1\cos(\omega\log x) + c_2\sin(\omega\log x))$$

הערה

ההצבה:

$$z = \log x$$

$$\Updownarrow$$

$$x = e^z$$

ממירה את משוואת אוילר למשוואה עם מקדמים קבועים:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dz} &= \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dz} = xy' \\
\frac{d^2y}{d^2z} &= \frac{d(xy')}{dz} = (xy')'\cdot x \\
&= xy'+x^2y'' \\
&\vdots \\
\frac{d^ny}{d^nz} &= c_1xy'+c_2x^2y''+\cdots+c_nx^ny^{(n)}
\end{aligned}$$

■

הגדרה

עבור משוואה:

$$y''+p(x)y'+q(x)y = 0$$

אם p,q אנליטיים בסביבה של x_0, אזי x_0 נקראת **נקודה אורדינרית**.

אם p,q אינם אנליטיים בסביבה של x_0, אזי x_0 נקראת **נקודה סינגולרית**.

אם x_0 נקודה סינגולרית ו - $(x-x_0)p(x),(x-x_0)^2q(x)$ אנליטיים בסביבה של x_0, אזי x_0 נקראת **נקודה סינגולרית רגולרית**.

אם x_0 נקודה סינגולרית ו - $(x-x_0)p(x),(x-x_0)^2q(x)$ אינם אנליטיים בסביבה של x_0, אזי x_0 נקראת **נקודה סינגולרית אי רגולרית**.

■

דוגמה

- עבור משוואת אוילר, 0 היא נקודה סינגולרית רגולרית.
- עבור המשוואה :

$$y'' + \frac{2}{x}y' + \frac{3}{x(x-1)^3}y \quad = \quad 0$$

כל נקודה חוץ מ - 0,1 היא נודה אורדינרית.

הנקודה 0 היא נקודה סינגולרית רגולרית.

הנקודה 1 היא נקודה סינגולרית אי רגולרית.

■

משפט (פרובניוס)

בסביבה של נקודה סינגולרית רגולרית x_0, קיים פתרון (אחד לפחות) מהצורה :

$$y \quad = \quad x^{\alpha}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$= \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\alpha}$$

■