פתרון תרגיל 2:

תרגיל 1:

א. $\exists x\exists y(R(x,y)\wedge\forall z(R(x,y)\to(z=y)))\to\neg\exists x(p(x)\wedge\forall y\neg R(x,y))$.

ב. $\forall x((\exists y R(x,y))\to\exists y\exists z(R(x,y)\wedge R(x,z)\wedge\neg(y=z)))$.

ג. $\exists x\exists y\exists z(R(x,z)\wedge R(y,z)\wedge\neg(x=y))$.

תרגיל 2:

א. $\exists!x((x>0)\wedge(2x^3+7x^2-17x-10=0))$.

ב. A הוא טוב לו, B הוא שמח, C הוא כף ימחא, ואז: $(A\wedge B)\to C$.

ג. נגדיר יחס $R(x,y)$ כ־x בא אל y. נסמן ב ־ M את מוחמד וב ־ H את ההר, ואז: $\neg R(M,H)\to R(H,M)$.

ד. נסמן ב ־ C את קבוצת המעגלים וב ־ S את קבוצת הריבועים. נגדיר יחס: $R(x,y)$ אם x חוסם את y. לכן:

$$\forall x\in S((\exists c\in C(R(x,c)))\wedge(\exists d\in C(R(d,x))))$$

ה. נסמן ב ־ A את "אני אני" וב ־ B את "אתה אתה", ואז:

$$(((B\to A)\wedge(A\to B))\to(\neg A\wedge\neg B))\wedge(((A\to A)\wedge(B\to B))\to(A\wedge B))$$

תרגיל 3:

א. ישר מאונך לרדיוס בקצהו הוא משיק למעגל. יהי מעגל O, וישר l העובר דרך הנקודה A הנמצאת על המעגל. ידוע כי OA אנך ל־l. צ"ל: הישר l הוא משיק למעגל. נזכיר מהי משיק למעגל : משיק למעגל הוא ישר החותך את הנקודה בישר אחת בלבד בניגוד למשיק לפונקציה, שבה משיק יכול לחתוך את הפונקציה יותר מפעם אחת). אם כך, נניח בשלילה כי לישר ולמעגל יש יותר מנקודה אחת משותפת, כלומר, קיימת נקודה B על המעגל דרכה המשיק עובר. במקרה הזה, מקבלים כי OB=OA, כלומר, המשולש OBA הוא משולש שווה שוקיים. זה כמובן אינו יכול להיות, כיוון שבמשולש שווה שוקיים, זוויות הבסיס מוכרחות להיות זוויות חדות, ולכן, הטענה המקורית שלנו לא הייתה נכונה ־ כלומר, ישר המאונך לרדיוס בקצהו משיק למעגל.

ב. יהיו ישרים מקבילים l_1,l_2. הישר l_3 חותך את הישרים ויוצר עם הישר l_1 זווית השווה ל־α ועם הישר l_2 זווית השווה ל־β. יש להוכיח כי $\beta=\alpha$. נניח בשלילה כי הדבר לא כך, ולשם פשטות, נניח כי $\alpha>\beta$ (ההוכחה עבור המקרה השני זהה). אם כך, אז הזווית β מוכלת באלפא, ועל כן, נוכל להעביר ישר. שייצור את הזווית γעם l_3 ואת הזווית β(ו ־ $\gamma=\beta$). אך זוהי סתירה, כיוון שהישר הנ"ל יוצר עם הישרים l_3 ו־l_2 משולש, שבו הזווית בטא היא זווית חיצונית. אך, זווית חיצונית במשולש גדולה מסכום הזוויות שאינן צמודות לה, ולכן, הגענו לסתירה. מכאן, הזוויות מוכרחות להיות שוות.