פתרון תרגיל 7 אינפי 3

23 בדצמבר 2015

1. f דיפרנציאבילית ב־$(0,0)$ ולכן אפשר לכתוב:

$$f(t_1,t_2)=f(0,0)+f_x(0,0)\,t_1+f_y(0,0)\,t_2+o(\|t\|)$$

כלומר:

$$f(t_1,t_2)=o(\|t\|)$$

ולכן מתקיים:

$$\lim_{(t_1,t_2)\longrightarrow(0,0)}\frac{f(t_1,t_2)}{\sqrt{t_1^2+t_2^2}}=0$$

כעת, לפי הגדרת h מתקיים:

$$h(0,0)=0$$

וגם:

$$h_x(0,0)=\lim_{t\longrightarrow0}\frac{h(t,0)-h(0,0)}{t}=\lim_{t\longrightarrow0}\frac{0-0}{t}=0$$

$$h_y(0,0)=\lim_{t\longrightarrow0}\frac{h(0,t)-h(0,0)}{t}=\lim_{t\longrightarrow0}\frac{0-0}{t}=0$$

נבדוק דיפרנציאביליות לפי ההגדרה:

$$h(t_1,t_2)=h(0,0)+h_x(0,0)\,t_1+h_y(0,0)\,t_2+o(\|t\|)$$

כלומר: $h\left(t_1,t_2\right)=o\left(\|t\|\right)$, ולכן נבדוק האם:

$$\lim_{(t_1,t_2)\longrightarrow(0,0)}\frac{h\left(t_1,t_2\right)}{\sqrt{t_1^2+t_2^2}}=0$$

נשים לב לכך ש: $h\left(t_1,t_2\right)\leq f\left(t_1,t_2\right)$ (כי $h=f$ או $h=0$) ולכן:

$$0\leq\lim_{(t_1,t_2)\longrightarrow(0,0)}\frac{h\left(t_1,t_2\right)}{\sqrt{t_1^2+t_2^2}}\leq\lim_{(t_1,t_2)\longrightarrow(0,0)}\frac{f\left(t_1,t_2\right)}{\sqrt{t_1^2+t_2^2}}=0$$

ואכן h דיפרנציאבילית.

2. נגדיר שתי פונקציות:

$$T\left(x,y\right)=h\left(x,y\right)-g\left(x,y\right),S\left(x,y\right)=f\left(x,y\right)-g\left(x,y\right)$$

S היא פונקציה דיפרנציאבילית כהפרש של פונקציות דיפרנציאביליות ובנוסף מתקיים:

$$S\left(0,0\right)=S_x\left(0,0\right)=S_y\left(0,0\right)=0$$

כמו כן,

$$T\left(x,y\right)=\begin{cases}S\left(x,y\right) & xy>0\\ 0 & xy\leq 0\end{cases}$$

לפי השאלה הקודמת, T דיפרנציאבילית ב– $(0,0)$ולכן גם h דיפרנציאבילית ב– $(0,0)$ כסכום של פונקציות דיפרנציאביליות, $h=T+g$.

3. לפי כלל השרשרת:

$$\frac{dw}{dt}=\frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial w}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial t}$$

במקרה שלנו:

$$\frac{dw}{dt}=\frac{6x}{3x^2-2y+4z^3}\cdot\frac{1}{2t^{\frac{1}{2}}}-\frac{2}{3x^2-2y+4z^3}\cdot\frac{2}{3t^{\frac{1}{3}}}-\frac{12z^2}{3x^2-2y+4z^3}\cdot\frac{2}{t^3}$$

ואחרי שנציב את x,y,z כביטויים של t נקבל:

$$\frac{dw}{dt}=\frac{9t^{\frac{1}{3}}-4-72t^{-\frac{20}{3}}}{9t^{\frac{4}{3}}-6+12t^{-\frac{17}{3}}}$$

4. הפונקציות דיפרנציאביליות היכן שאנו רוצים ולכן לפי כלל השרשרת:

$$J_{g\circ f}\left(1,\frac{\pi}{4},2\right)=J_g\left(f\left(1,\frac{\pi}{4},2\right)\right)\cdot J_f\left(1,\frac{\pi}{4},2\right)$$

ולכן: $f\left(1,\frac{\pi}{4},2\right)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2},\sqrt{2}\right)$

$$J_g\left(f\left(1,\frac{\pi}{4},2\right)\right)=\left.\begin{pmatrix}4x^3z^2 & 0 & 2x^4z\\ 2x\ln 2y & \frac{x^2}{y} & 0\\ yz & xz & xy\end{pmatrix}\right|_{\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2},\sqrt{2}\right)}=\begin{pmatrix}2\sqrt{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & \frac{\sqrt{2}}{4}\end{pmatrix}$$

$$J_f\left(1,\frac{\pi}{4},2\right)=\left.\begin{pmatrix}2x\sin y & x^2\cos y & 0\\ \frac{1}{z} & 0 & -\frac{x}{z^2}\\ 0 & -z\sin y & \cos y\end{pmatrix}\right|_{\left(1,\frac{\pi}{4},2\right)}=\begin{pmatrix}\sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4}\\ 0 & -\sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$$

לכן:

$$J_{g\circ f}\left(1,\frac{\pi}{4},2\right)=\begin{pmatrix}2\sqrt{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & \frac{\sqrt{2}}{4}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4}\\ 0 & -\sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4}\\ \frac{3}{2} & 0 & 0\end{pmatrix}$$

5. הפונקציה שלנו תהיה:

$$f(x,y)=\sqrt{x^3+y^3}$$

והנקודה הקרובה תהיה $(1,2)$. נשים לב ש־f אכן דיפרנציאבילית בנקודה.

השינויים בערכי הנקודה הם $h_1=0.02, h_2=-0.03$ ולכן:

$$f(1.02,1.97)\approx f(1,2)+f_x(1,2)\cdot 0.02+f_y(1,2)\cdot(-0.03)$$

כעת:

$$f_x(1,2)=\left.\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+y^3}}\right|_{(1,2)}=\frac{1}{2}$$

$$f_y\left(1,2\right)=\left.\frac{3y^2}{2\sqrt{x^3+y^3}}\right|_{(1,2)}=2$$

בנוסף, $f\left(1,2\right)=3$ ובסך הכל:

$$\sqrt{1.02^3+1.97^3}=3+\frac{1}{2}\cdot 0.02-2\cdot 0.03=2.95$$

6. לפי הנוסחה לדיפרנציאל:

$$d^k_{(0,0)}f\left(x,y\right)=\sum_{\alpha_1+\alpha_2=k}\frac{k!}{\alpha_1!\cdot\alpha_2!}\cdot\frac{\partial^k f}{\partial x^{\alpha_1}\partial y^{\alpha_2}}\left(0,0\right)x^{\alpha_1}y^{\alpha_2}$$

במקרה שלנו:

$$f_x\left(x,y\right)=f_y\left(x,y\right)=g'\left(x+y\right)$$

לכן:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^{\alpha_1}\partial y^{\alpha_2}}\left(x,y\right)=g^{(k)}\left(x,y\right)$$

לפיכך:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^{\alpha_1}\partial y^{\alpha_2}}\left(0,0\right)=g^{(k)}\left(0\right)$$

נציב ונקבל:

$$d^k_{(0,0)}f\left(x,y\right)=\sum_{\alpha_1+\alpha_2=k}\frac{k!}{\alpha_1!\cdot\alpha_2!}\cdot g^{(k)}\left(0\right)x^{\alpha_1}y^{\alpha_2}$$

$g^{(k)}\left(0\right)$ הוא ביטוי קבוע ביחס לסכום ולכן אפשר לשלוף אותו החוצה מהסכום:

$$d^k_{(0,0)}f\left(x,y\right)=g^{(k)}\left(0\right)\cdot\sum_{\alpha_1+\alpha_2=k}\frac{k!}{\alpha_1!\cdot\alpha_2!}\cdot x^{\alpha_1}y^{\alpha_2}$$

ומנוסחת הבינום של ניוטון נקבל שאכן:

$$d^k_{(0,0)}f\left(x,y\right)=g^{(k)}\left(0\right)\cdot\sum_{\alpha_1+\alpha_2=k}\frac{k!}{\alpha_1!\cdot\alpha_2!}\cdot x^{\alpha_1}y^{\alpha_2}=g^{(k)}\left(0\right)\left(x+y\right)^k$$