

תרגיל 7 - פונקציות מרוכבות

1. מצאו את כל נקודות המקסימום (הגלובאליות) של הפונקציה

$$f(z) = z^2 - 3z + 2$$

בעיגול $\{z \mid |z| \leq 1\}$. (הדרכה: כתבו $z = x + iy$ והשתמשו בעיקרון המקסימום)

2. תהי $f(z)$ אנליטית בעיגול היחידה (כלומר $\{z \mid |z| < 1\}$) עם התכונה שלכל z כך ש-
 $0 < |z| < 1$ מתקיים ש- $|f(z)| \leq \ln \frac{1}{|z|}$. הוכיחו כי f היא פונקציית האפס.

3. מצאו את תחום ההתכנסות של הטורים הבאים:

א. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1+i)^n}{2^{n+n}}$

ב. $\sum_{n=0}^{\infty} i^n z^n$

ג. $\sum_{n=0}^{\infty} n! (z^3 - i)^n$

ד. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 3^n} \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n, z \neq 1$

4. יהי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ טור המתכנס בתנאי. הוכיחו כי רדיוס ההתכנסות של הטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ הוא 1.

5. מצאו את טור טיילור עבור הפונקציות הבאות:

א. $\sin^3 z$ סביב $z_0 = 0$. (רמז: $\sin^3 z = \frac{1}{4}(3\sin z - \sin 3z)$)

ב. $\operatorname{Log} \left(\frac{1+z}{1-z}\right)$ סביב $z_0 = 0$.

ג. $\frac{1}{z}$ סביב $z_0 = 3$.

ד. $z^2 \sin z$ סביב $z_0 = \frac{\pi}{2}$.

ה. $\frac{z}{z^4+9}$ סביב $z_0 = 0$.