פתרון שאלה 1

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & x \\ 0 & 1 & -6 & y \\ 2 & 1 & 4 & z \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & x \\ 0 & 1 & -6 & y \\ 0 & -1 & 6 & z-2x \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & x \\ 0 & 1 & -6 & y \\ 0 & 0 & 0 & z-2x+y \end{array}\right)$$

וקטורים לא מהבים בסיס של R^3 כי הם ת"ל, מימד של U שווה ל-2 והבסיס למשל קבוצה $B=\{(1,0,2),(1,1,1)\}$ ומשוואות $-2x+y+z=0$

$U \cap W$ מהווה תת-מרחב של R^3 המורכב מפתרונות של המערכת

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ -2x+y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y-z=0 \\ 3y-z=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$z=t,\ y=\frac{1}{3}t,\ x=z-y=\frac{2}{3}t \Rightarrow$$

$$(x,y,z)=\left(\frac{2}{3}t,\frac{1}{3}t,t\right)=t\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},1\right)$$

לכן מימד של $U \cap W$ שווה לאחד ובסיס לדוגמא הוקטור $\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},1\right)$

לה 1

פתרון שאלה 2

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & a \\ 2 & 1 & 4 & -5 & b \\ -1 & -2 & 2 & 1 & c \\ 1 & 3 & 1 & 0 & d \end{array}\right) \xrightarrow[R_4 \to R_4 - R_1]{\substack{R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ R_3 \to R_3 + R_1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & a \\ 0 & -3 & 2 & -3 & b-2a \\ 0 & 0 & 3 & 0 & c+a \\ 0 & 1 & 0 & 1 & d-a \end{array}\right) \xrightarrow{R_4 \to R_4 + 3R_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & a \\ 0 & -3 & 2 & -3 & b-2a \\ 0 & 0 & 3 & 0 & c+a \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 3d-5a+b \end{array}\right) \xrightarrow{R_4 \to 3R_4 - 2R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & a \\ 0 & -3 & 2 & -3 & b-2a \\ 0 & 0 & 3 & 0 & c+a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -17a+3b-3c+9d \end{array}\right)$$

לכן משוואה של W היא

$$-17a+3b-3c+9d=0$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 2 & 1 & a \\ -5 & 3 & 4 & -1 & b \\ 2 & -1 & -1 & 1 & c \\ 1 & 2 & 7 & 4 & d \end{array}\right) \xrightarrow[R_4 \to R_4 + R_1]{\substack{R_2 \to R_2 - 5R_1 \\ R_3 \to R_3 + 2R_1}} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 2 & 1 & a \\ 0 & -2 & -6 & -6 & b-5a \\ 0 & 1 & 3 & 3 & c+2a \\ 0 & 3 & 9 & 5 & d+a \end{array}\right) \xrightarrow[R_4 \to R_4 - 3R_2]{R_3 \to 2R_3 + R_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 2 & 1 & a \\ 0 & -2 & -6 & -6 & b-5a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a+b+2c \\ 0 & 0 & 0 & -4 & d-5a-3c \end{array}\right)$$

לכן משוואה של U היא

$$-a+b+2c=0$$

בשביל לחשב מימד של חיתוך צריך למצוא דרגות החופש של מערכת משוואות

$$\begin{cases} -17a+3b-3c+9d=0 \\ -a+b+2c=0 \end{cases}$$

למערכת 2=4-2 דרגות החופש לכן

$$\dim W \cap U = 2$$

פתרון שאלה 3

א. כדי להוכיח כי W תת מרחב של $R^{3\times 2}$ יש להוכיח שלושה תנאים:

1. מטריצת ה- 0 שייכת ל- W כי $0\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=0$

2. יהיו A ו- B שתי מטריצות ב- W, כלומר נתון כי $A\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=0$ וגם $B\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=0$, צריך להוכיח כי $(A+B)\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=0$:

לפי הנתון וחוקי כפל מטריצות נקבל:

$$(A+B)\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=A\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+B\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=0+0=0$$

3. יהי α סקלר ממשי ו- A מטריצה ב- W, כלומר נתון כי $A\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=0$, וצריך להוכיח כי $\alpha A\in W$: $\alpha A\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\alpha\cdot 0=0$.

ב. מצא בסיס ומימד ל- W ול- U:

נמצא איבר כללי ל- W:

$$W=\left\{A\in R^{3\times 2}\;\middle|\;A\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=0\right\}$$

$$A\in R^{3\times 2}\quad\Rightarrow\quad A=\begin{pmatrix}x&y\\z&w\\t&s\end{pmatrix}$$

$$A\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=0\quad\Rightarrow\quad\Rightarrow\quad\begin{pmatrix}x&y\\z&w\\t&s\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{pmatrix}x+y\\z+w\\t+s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}x+y=0\\z+w=0\\t+s=0\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}x=-y\\z=-w\\t=-s\end{cases}\quad\Rightarrow\quad A\in W\quad\Leftrightarrow\quad A=\begin{pmatrix}x&-x\\z&-z\\t&-t\end{pmatrix}$$

קיבלנו איבר כללי ל- W. נוציא סקלרים לקבלת קבוצה פורשת ונבדוק תלות לקבלת בסיס.

<u>הערה</u>: שימו לב שלמציאת איבר כללי של W פתרנו מערכת של 3 משוואות בלתי תלויות עם 6 נעלמים. מכאן, כי מימד המרחב W שווה למימד מרחב הפתרונות של המערכת כלומר: $6-3=3$.

$$A=\begin{pmatrix} x & -x \\ z & -z \\ t & -t \end{pmatrix}=x\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+z\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

ניתן לראות כי הקבוצה הפורשת היא גם בלתי תלויה ולכן מהווה בסיס ל- W, ובנוסף, $\dim W=3$.

אפשרות אחרת: לפי ההערה, מימד W הוא 3. מאחר וקיבלנו קבוצה פורשת המכילה 3 וקטורים, הרי שהקבוצה הפורשת היא גם בסיס ל- W.

מציאת בסיס ומימד ל- U. המרחב U נתון באמצעות איבר כללי, לכן נוציא סקלרים לקבלת קבוצה פורשת ונבדוק תלות לקבלת בסיס.

$$\begin{pmatrix} a+b+c+d & -2a-2c \\ b+d & -b-d \\ a+b+2c & -a-b+2c-4d \end{pmatrix}=a\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}+c\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}+d\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -4 \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

קיבלנו קבוצה פורשת למרחב U ובלתי תלויה, לכן: $\dim U=3$ ובסיס ל- U הוא:

$$\left\{\begin{pmatrix}1&-2\\0&0\\1&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&2\\1&-1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\1&3\end{pmatrix}\right\}$$

ג. לפי סעיף ב', קל לראות את התנאים של המרחב W : סכום האיברים בכל שורה שווה ל- 0. לכן, נבנה איבר כללי מהבסיס שמצאנו למרחב U, ונאלץ עליו את תנאי W :

$$\left\{\begin{pmatrix}1&-2\\0&0\\1&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&2\\1&-1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\1&3\end{pmatrix}\right\}$$

$$a\begin{pmatrix}1&-2\\0&0\\1&-1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0&2\\1&-1\\0&0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&-2a+2b\\b&-b\\a+c&-a+3c\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}a-2a+2b=0\\b-b=0\\a+c-a+3c=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-a+2b=0\\b-b=0\\4c=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2b\\b=b\\c=0\end{cases}\Rightarrow\begin{pmatrix}2b&-2b\\b&-b\\2b&-2b\end{pmatrix}=b\begin{pmatrix}2&-2\\1&-1\\2&-2\end{pmatrix}$$

קיבלנו כי $\dim(U\cap W)=1$ ובסיס ל- $U\cap W$ הוא: $\left\{\begin{pmatrix}2&-2\\1&-1\\2&-2\end{pmatrix}\right\}$.

פתרון שאלה 5

$$A=\begin{bmatrix}1&2&-1\\1&9&-1\\-3&8&3\\-2&3&2\end{bmatrix}$$

כדי למצוא בסיס למרחב השורות, נבצע פעולות גאוס על השורות:

$$\begin{pmatrix}1&2&-1\\1&9&-1\\-3&8&3\\-2&3&2\end{pmatrix}\xrightarrow[R_4\to R_4+2R_1]{\substack{R_2\to R_2-R_1\\R_3\to R_3+3R_1}}\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&7&0\\0&14&0\\0&7&0\end{pmatrix}\xrightarrow[R_4\to R_4-R_2]{R_3\to R_3-2R_2}\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&7&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

קבוצת הוקטורים $\{(1\quad 2\quad -1),(0\quad 7\quad 0)\}$ היא בסיס למרחב השורות של A (לכן דרגת השורות=2).

הסבר:
הקבוצה היא פורשת כי פעולות אלמנטריות (פעולות גאוס) על קבוצת וקטורים לא גורמות לשינויי המרחב הנפרש.
הקבוצה **היא בת"ל** כי הוקטורים בקבוצה יכולים לשמש כחלק מהשורות של מטריצה משולשית עם אלכסון ללא אפסים.

מרחב העמודות של A: :

כדי למצוא בסיס למרחב העמודות, נבצע פעולות גאוס על העמודות:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 0 \\ -3 & 14 & 0 \\ -2 & 7 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{C_2\to C_2-2C_1 \\ C_3\to C_3+C_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 9 & -1 \\ -3 & 8 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

קבוצת הוקטורים $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 14 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$ היא בסיס למרחב העמודות (לכן דרגת העמודות =2).

הסבר:
הקבוצה היא פורשת כי פעולות אלמנטריות (פעולות גאוס) על קבוצת וקטורים לא גורמות לשינויי המרחב הנפרש.
הקבוצה **היא בת"ל** כי הוקטורים בקבוצה יכולים לשמש כחלק מהעמודות של מטריצה משולשית עם אלכסון ללא אפסים.

פתרון שאלה 6

תהי $A\in M_{7\times 3}(R)$ כך ש- $rank\ A=3$.

א. האם שורות A תלויות או בלתי תלויות לינארית?

דרגת השורות =דרגת המטריצה=3.

יש ב- A 7 שורות השייכות למרחב ממימד קטן מ- 7 ולכן השורות תלויות לינארית.

ב. האם עמודות A תלויות או בלתי תלויות לינארית?

דרגת העמודות =דרגת המטריצה=3.

3 העמודות פורשות מרחב ממימד 3 ולכן הן בת"ל.

ג. מהו מימד מרחב הפתרונות של מערכת המשוואות ההומוגנית $A\vec{x}=\vec{0}$ ($\vec{x}\in R^3, \vec{0}\in R^7$)?

מכיוון ש- $rank\ A=3$, דרגת השורות היא $r=3$. במערכת הנתונה מספר המשתנים הוא $n=3$. מתקיים $p=n-r$ לכן נקבל $p=3-3=0$. כלומר מימד מרחב הפתרונות הוא 0.

הערה: למערכת קיים פתרון יחיד, הפתרון הטריוויאלי.

פתרון שאלה 7

7. ראשית נראה כי $U\cap W=0$.

$$U\cap W=\left\{A\in V \mid A^T=A\wedge A^T=-A\right\}=\left\{A\in V \mid A^T=A=-A\right\}\Rightarrow U\cap W=0$$

כעת נסתכל את המימדים של U ו-W.

מאחר ו-U הוא מרחב המטריצות הסימטריות, אז מספר המימדים שלו הוא הטור הבא $\dim U=\sum_{i=1}^{n} i=1+2+\ldots+(n-1)+n$.

מאחר ו-W הוא מרחב המטריצות האנטי סימטריות, אז מספר המימדים שלו הוא הטור הבא $\dim W=\sum_{i=1}^{n-1} i=1+2+\ldots+(n-2)+(n-1)$.

מאחר ו-V הוא מרחב המטריצות הריבועיות מסדר חאn, אז מספר המימדים שלו הוא $\dim W=n^2$.

$$\dim W+\dim U+\dim(U\cap W)=$$
$$=\sum_{i=1}^{n-1} i+\sum_{k=1}^{k} k=(1+2+\ldots+(n-2)+(n-1))+(1+2+\ldots+(n-2)+(n-1)+n)+0=$$
$$=2((n-1)+1)+2((n-2)+2)+\ldots+n=2((n-1)+1+(n-2)+2+\ldots)+n=$$
$$=2\left((n-1)\frac{n}{2}\right)+n=n(n-1)+n=n^2-n+n=n^2=\dim V$$
$$\Rightarrow V=U\oplus W$$