תזכורת:

פונקציה $f:A\to B$ נקראת חח"ע, אם למקורות שונים יש תמונות שונות;
פונקציה נקראת על, אם לכל איבר בטווח יש מקור בתחום.

עוצמות:

המטרה הכללית היא להבחין בין סדרי גודל שונים של קבוצות אינסופיות.
נעשה זאת באמצעות פונקציות חח"ע ועל.
עוצמה של קבוצה היא, אינטואיטיבית, מספר האיברים בקבוצה.

ראשית, נתבונן בקבוצות סופיות ואת מה שנסיק מכך נכליל גם למקרה האינסופי.

פונקציות חח"ע ועל בין קבוצות סופיות:

תהיינה A,B קבוצות. נניח שקיימת $f:A\to B$ חח"ע; מה זה אומר על העוצמות $|A|,|B|$? ואם קיימת פונקציה על? פונקציה חח"ע ועל?

טענה:

א. אם קיימת $f:A\to B$ חח"ע, אז: $|A|\leq|B|$.

ב. אם קיימת $f:A\to B$ על, אז: $|A|\geq|B|$.

ג. אם קיימת פונקציה $f:A\to B$ חח"ע ועל, אז: $|A|=|B|$.

הסבר:

א. אם קיימת $f:A\to B$ חח"ע, אם $a_i\neq a_j$ אז: $f(a_i)\neq f(a_j)$. מכיוון ש־A סופית, אפשר לרשום: $A=\{a_1,\ldots,a_n\}$ ואז: $|A|=n$.
כעת, $\{f(a_1),\ldots,f(a_n)\}\subseteq B$ ולכן: $|\{f(a_1),\ldots,f(a_n)\}|\leq|B|$.
מצד שני, מכיוון ש־f חח"ע, כל האיברים בקבוצה הזו שונים זה מזה ולכן:

$|\{f(a_1),\ldots,f(a_n)\}|=n$, ואכן: $|A|\leq|B|$.

ב. אם קיימת $f:A\to B$ על, לכל $b\in B$ קיים $a\in A$ עבורו: $f(a)=b$, כלומר: $\{a\}\subseteq f^{-1}[\{b\}]$. בפרט, $|f^{-1}[\{b\}]|\geq|\{b\}|=1$. לכן, נקבל: $|A|=|\bigcup f^{-1}[\{b\}]|\geq|\bigcup\{b\}|=|B|$ (נשים לב שתמונות הפוכות של איברים שונים הן זרות).

ג. נובע ישירות מהסעיפים הקודמים.

בעצם, גם הכיוון ההפוך נכון.

<u>טענה:</u>

א. אם $|A|\leq|B|$, אז קיימת $f:A\to B$ חח"ע.

ב. אם $|A|\geq|B|$ אז קיימת $f:A\to B$ על.

ג. אם $|A|=|B|$ אז קיימת $f:A\to B$ חח"ע ועל.

<u>הסבר:</u>

נסביר את א'. אפשר לרשום: $A=\{a_1,\ldots,a_m\},B=\{b_1,\ldots,b_n\}$ כאשר: $m\leq n$. כעת, אפשר להגדיר פונקציה $f:A\to B$ כך:

$$f(a_1)=b_1,\ldots,f(a_m)=b_m$$

התמונות שונות זו מזו ולכן f חח"ע.

<u>מסקנה:</u>

1. $|A|\leq|B|$ אם ורק אם קיימת $f:A\to B$ חח"ע.
2. $|A|=|B|$ אם ורק אם קיימת $f:A\to B$ חח"ע ועל.

<u>עוצמות אינסופיות:</u>

באמצעות המסקנה שלנו, **נגדיר** שוויון ואי־שוויון בין עוצמות באופן כללי.

1. $|A| \le |B|$ אם ורק אם קיימת $f : A \to B$ חח"ע.
2. $|A| = |B|$ אם ורק אם קיימת $f : A \to B$ חח"ע ועל.

נדגיש: מדובר בהגדרה. כלומר, בכל פעם שאנחנו רואים "$|A| = |B|$", אנחנו צריכים לקרוא את זה בראש בתור "קיימת $f : A \to B$ חח"ע ועל".

נסמן: $|\mathbb{N}| = \aleph_0, |\mathbb{R}| = \aleph$. היום נתמקד בעיקר בקבוצות שעוצמתן היא $\aleph_0$ (כלומר, ישפונקציה חח"ע ועל ביניהן לבין הטבעיים), וכמה שנספיק על $\aleph$.

<u>טענה:</u>

שוויון בין עוצמות מתנהג כמו יחס שקילות.

<u>הוכחה:</u>

1. "רפלקסיביות": צ"ל ש: $|A| = |A|$, כלומר להראות שקיימת $f : A \to A$ חח"ע ועל. פונקציית הזהות: $id_A : A \to A$ מקיימת את הדרוש.
2. "סימטריות": נתון ש: $|A| = |B|$, צ"ל: $|B| = |A|$. כלומר, נתון שקיימת $f : A \to B$ חח"ע ועל, צ"ל שקיימת $g : B \to A$ חח"ע ועל. מכיוון ש־f חח"ע ועל, f הפיכה ולכן מוגדרת הפונקציה ההופכית: $f^{-1} : B \to A$, שגם היא חח"ע ועל (כי גם היא הפיכה, וההופכית שלה היא f).
3. "טרנזיטיביות": נתון ש: $|A| = |B|, |B| = |C|$, צ"ל: $|A| = |C|$. כלומר, נתון שקיימות $f : A \to B, g : B \to C$ חח"ע ועל, צ"ל שקיימת $h : A \to C$ חח"ע ועל. ההרכבה: $g \circ f : A \to C$ היא חח"ע ועל (הרכבה של חח"ע ועל היא חח"ע ועל - ראינו בהרצאה הקודמת), מקיימת את הדרוש.

זה לא ממש יחס שקילות, כי אוסף כל הקבוצות הוא לא קבוצה, ויחסים

מוגדרים אך ורק מעל קבוצות. כמובן שאם מסתכלים על קבוצה של קבוצות, למשל "קבוצת כל הקבוצות שניתקל בהן במהלך הקורס", אז מדובר ביחס שקילות. תכלס, זה לא באמת משנה, העיקר ששוויון עוצמות מתנהג כמו שאנחנו מצפים משוויון להתנהג (כל אחד שווה לעצמו, אם א' שווה ב' אז ב' שווה א' וכלל המעבר).

כעת, אפשר לשאול ־ האם אי־שוויון בין עוצמות מתנהג כמו יחס סדר? רפלקסיביות וטרנזיטיביות מוכחות כמו בשוויון, במקום חח"ע ועל נרשום חח"ע. הבעיה היא באנטי־סימטריות – אם $|B| \leq |A|$ וגם $|B| \geq |A|$ אז: $|A| = |B|$. כלומר, אם קיימת $f : A \to B$ וגם קיימת $g : B \to A$ חח"ע, אז קיימת $h : A \to B$ חח"ע ועל. הטענה הזו לא ברורה בכלל; היא נכונה, והיא נקראת משפט קנטור־שרדר־ברנשטיין.

<u>קבוצות בנות־מניה:</u>

קבוצה A נקראת בת־מניה, אם $|A| \leq \aleph_0$, כלומר קיימת פונקציה חח"ע: $A \to \mathbb{N}$. בהמשך נראה ש־$\aleph_0$ היא העוצמה האינסופית הקטנה ביותר, ולכן אם A בת־מניה אז A סופית או $|A| = \aleph_0$. השם הוא "בת־מניה" כי, אינטואיטיבית, אפשר למנות את איברי הקבוצה "אחד־אחד". כעת, ניתן כמה דוגמאות לקבוצות בנות מניה מצד אחד, וננסח כמה משפטים על קבוצות כאלו מצד שני.

<u>טענה:</u>

$|\mathbb{N} \cup \{0\}| = \aleph_0$.

<u>הוכחה:</u>

לפי ההגדרה, אנחנו צריכים למצוא פונקציה $f : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{N}$ חח"ע ועל.

הפונקציה $f(n) = n + 1$ תקיים את הדרוש.

חח"ע – אם $n_1 \neq n_2$ אז: $n_1 + 1 \neq n_2 + 1$ ולכן: $f(n_1) \neq f(n_2)$.

על – לכל $x \in \mathbb{N}$, $x - 1 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ מקיים: $f(x-1) = x - 1 + 1 = x$.

באופן כללי, אם A אינסופית ו־B סופית אז: $|A \cup B| = |A|$, כלומר הוספת מספר סופי של איברים לא משנה את העוצמה.

לפני שנגיע לטענה הבאה, נשים לב לנקודה הבאה. אם הקבוצה היא אינסופית בת־מניה (עוצמתה $\aleph_0$), אפשר "לסדר" אותה אחד לאחד מול הטבעיים. למשל, בדוגמה שלנו, אפשר לרשום:

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots \end{array}$$

ברישום כזה אנחנו בעצם מתארים פונקציה חח"ע ועל מהקבוצה שלנו לטבעיים, מה שאומר שהעוצמות שלהן אכן שוות.

שוב, זו הסיבה לשם "בת־מניה" – אפשר למנות את איברי הקבוצה אחד־אחד, לומר "זה הראשון, זה השני וכן הלאה", לסדר אותם מול הטבעיים.

מכאן, אפשר לחשוב על סדרה אינסופית $a_1, a_2, a_3, \dots$ של איברים מקבוצה A כעל פונקציה $f : \mathbb{N} \to A$, המוגדרת: $f(n) = a_n$.

<u>טענה:</u>

<u>$|\mathbb{Z}| = \aleph_0$</u>.

<u>הוכחה:</u>

אנחנו צריכים למצוא פונקציה $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ חח"ע ועל (או להיפך). אפשר

לרשום:

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & -3 & \ldots \end{array}$$

כלומר:

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & n = 2k \\ \frac{1-n}{2} & n = 2k+1 \end{cases}$$

כאשר k אי־שלילי.

בעצם, "חילקנו" את הטבעיים לשתי קבוצות אינסופיות, הזוגיים והאי־זוגיים, והתאמנו כל אחת מהן ל"חתיכה" אחת של השלמים – החיובים והאי־חיוביים; כמו שהשלמים, אינטואיטיבית, מחולקים לשתי קבוצות, כך גם הצגנו את הטבעיים והתאמנו ביניהן.

את המהלך הזה (ומהלכים נוספים) אפשר לתאר באמצעות משל נחמד – המלון של הילברט.

המלון של הילברט הוא מלון שבו יש אינסוף חדרים, שממסופרים ב־$1, 2, 3, 4, \ldots$.

כל החדרים בתפוסה מלאה.

לדלפק הקבלה מגיע אורח ורוצה להתארח במלון. לכאורה, אי־אפשר לעזור לו – כל החדרים תפוסים..."אין בעיה", אומר הילברט, "פשוט נזיז את כל האורחים חדר אחד קדימה". החדר הראשון הראשון יתפנה, אף אורח לא יסולק מהמלון, ונוכל לשכן את האורח החדש, שנקרא 0, בחדר שהתפנה.

כעת, בכל פעם שתבוא קבוצה סופית של n אורחים, תזיז את כולם n חדרים קדימה.

למחרת, באה קבוצה אינסופית של אורחים, שקוראים להם: $-1, -2, -3, \ldots$.

מה נעשה הפעם? אי־אפשר לדחוף אינסוף חדרים קדימה...

"אין בעיה", אמר הילברט, "שכל אורח יעבור לחדר שמספרו גדול פי שניים ממספר חדרו הנוכחי", ונשכן את האורחים החדשים בחדרים שמספרם אי־זוגי – $1-$ בחדר 1, $2-$ בחדר 3 וכן הלאה.

למחרת, באו שתי קבוצות של אינסוף אורחים כמו ביום אמש. גם פה, אפשר לשלוח את האורחים לחדרים שגדולים פי 3 מהחדרים הנוכחיים, קבוצה אחת לשכן בחדרים ששארית החלוקה שלהם ב־3 היא 1, וקבוצה שניה לשכן בחדרים ששארית החלוקה שלהם ב־3 היא 2.

באופן כללי, אם באות k קבוצות אינסופיות כאלו, נשלח כל אורח לחדר שגדול פי $k+1$ מחדרו הנוכחי, וכל קבוצה נשלח לחדרים עם שארית חלוקה מסוימת ב־$k+1$.

שבוע אחר כך הגיעו למלון אינסוף קבוצות של אינסוף אורחים. "אין בעיה", אמר הילברט, "יש לנו אינסוף מספרים ראשוניים". כל אורח ילך לחדר שהוא 2 בחזקת החדר הנוכחי שלו, קבוצה אחת תלך לחדרים שהם חזקות של 3, קבוצה שניה תלך לחזקות של 5 וכן הלאה:

$$\left\{2^k|k\in\mathbb{N}\right\},\left\{3^k|k\in\mathbb{N}\right\},\left\{5^k|k\in\mathbb{N}\right\}\ldots$$

יש לנו אינסוף קבוצות של אינסוף חדרים.

שבוע אחר כך, הגיעו למלון כל המספרים בקטע $(0,1)$. "אין לנו מספיק חדרים בשבילם", אמר הילברט לפקיד הקבלה.

מתמטית, המלון של הילברט הוא קבוצה בת־מניה, הטבעיים, והשאלות ששאלנו הן:

1. אם מוסיפים איבר בודד לקבוצה בת מניה האם הקבוצה היא בת־מניה? באופן כללי, אם מוסיפים מספר סופי של איברים לקבוצה בת־מניה, האם

היא בת־מניה? כן.

2. האם איחוד של שתי קבוצות בנות־מניה הוא קבוצה בת־מניה? באופן כללי, איחוד סופי (מספר הקבוצות שמשתתפות באיחוד הוא סופי) של קבוצות בנות־מניה הוא קבוצה בת־מניה? כן.

3. האם איחוד בן־מניה של קבוצות בנות־מניה הוא קבוצה בת־מניה? כן.

4. האם $(0,1)$ בן־מניה? לא. מסקנה – יש יותר מאינסוף אחד.

נחזור לטענה שלנו – נוכיח שהפונקציה : f , $f\left(n\right)=\begin{cases}\frac{n}{2} & n=2k\\ \frac{1-n}{2} & n=2k+1\end{cases}$ היא $\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ היא חח"ע ועל.

חח"ע – יהיו $n_1\neq n_2$, צ"ל: $f\left(n_1\right)\neq f\left(n_2\right)$. אם אחד מהם זוגי ואחד אי־זוגי, בה"כ n_1 זוגי, אז $f\left(n_1\right)>0$ ו־$f\left(n_2\right)\leq 0$ ובפרט: $f\left(n_1\right)\neq f\left(n_2\right)$.

אם שניהם זוגיים, נקבל: $f\left(n_1\right)=\frac{n_1}{2},f\left(n_2\right)=\frac{n_2}{2}$ ולכן – מכיוון ש־$n_1\neq n_2$ – נקבל ש: $f\left(n_1\right)\neq f\left(n_2\right)$.

באופן דומה, אם שניהם אי־זוגיים, אז מכיוון ש־$n_1\neq n_2$ גם: $\frac{1-n_1}{2}\neq\frac{1-n_2}{2}$, כלומר: $f\left(n_1\right)\neq f\left(n_2\right)$.

על – יהי $x\in\mathbb{Z}$, נראה שקיים $n\in\mathbb{N}$ המקיים: $f\left(n\right)=x$.

אם $x>0$, $n=2x$ מקיים: $f\left(n\right)=\frac{n}{2}=x$.

אם $x\leq 0$, אנחנו מחפשים n אי־זוגי, עבורו: $f\left(n\right)=\frac{1-n}{2}=x$, כלומר: $n=1-2x$ יקיים את הדרוש.

סה"כ, f חח"ע ועל, ואכן: $|\mathbb{Z}|=\aleph_0$.

<u>טענה:</u>

$|\mathbb{Q}|=\aleph_0$.

הוכחה:

פעם הבאה.

טענה (האלכסון של קנטור):

$|\mathbb{N}\times\mathbb{N}|=\aleph_0$.

הוכחה:

הרעיון הוא להתאים בין הזוגות של $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ לאיברים של $\mathbb{N}$, כמו שעשינו ל־$\mathbb{Z}$.

דוגמה לכך בסיכום.

מסקנה:

אם $|B|=\aleph_0$, $|A|$ אז גם: $|A\times B|=\aleph_0$. למשל: $|\mathbb{Z}\times\mathbb{N}|=|\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}|=|\mathbb{Z}\times\mathbb{N}\times\mathbb{Z}|$.

כמו כן, אם $|A|,|B|\leq\aleph_0$ אז: $|A\times B|\leq\aleph_0$.

כמה טענות קצרות:

1. אם $A\subseteq B$ אז: $|A|\leq|B|$. הפונקציה: $f:A\to B$ שלוקחת כל איבר לעצמו: $f(x)=x$ היא חח"ע. הפונקציה הזו נקראת פונקציה ההכלה.
2. $|A\times B|=|B\times A|$. הפונקציה: $f:A\times B\to B\times A$ המוגדרת ע"י: $f(a,b)=(b,a)$ היא חח"ע ועל.

אי־שוויון חזק בין עוצמות:

הגדרה: נאמר ש־$|A|<|B|$, אם $|A|\leq|B|$ וגם $|A|\neq|B|$.

כלומר, $|A|<|B|$ אם קיימת $f:A\to B$ חח"ע ולא קיימת $g:A\to B$ חח"ע ועל. בפועל, אפשר לומר שקיימת $f:A\to B$ חח"ע ולא קיימת $g:A\to B$ על.

<u>משפט: (גם זה נקרא האלכסון של קנטור...)</u>

<u>$\aleph_0 < \aleph$.</u>

<u>הוכחה:</u>

אנו צריכים להראות שקיימת פונקציה חח"ע מהטבעיים לממשיים, ושלא קיימת פונקציה על כזו.

ראשית, $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ ולכן: $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{R}|$, כלומר: $\aleph_0 \leq \aleph$.

שנית, נסמן ב־A את קבוצת כל המספרים העשרוניים בקטע $[0,1]$ שבנויים מהספרות $0,1$ בלבד (סדרות בינאריות). $A \subseteq \mathbb{R}$, ולכן: $|A| \leq \aleph$. אם נראה ש: $\aleph_0 < |A|$, בוודאי ש: $\aleph_0 < \aleph$.

לכן, אנחנו צריכים להראות שאין פונקציה $f : \mathbb{N} \to A$ שהיא על. אם כן, תהי $f : \mathbb{N} \to A$ פונקציה, ונוכיח ש־f איננה על.

* אפשר להגדיר $f : \mathbb{N} \to A$ חח"ע, למשל: $f(n) = 0.1111\dots11$, n פעמים.

אפשר לרשום את f "מפורשות", כלומר:

$$f(1) = 0.a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}\dots$$

$$f(2) = 0.a_{21}a_{22}a_{23}a_{24\dots}$$

$$f(3) = 0.a_{31}a_{32}a_{33}a_{34\dots}$$

$$f(n) = 0.a_{n1}a_{n2}a_{n3}a_{n4\dots}$$

כאשר $a_{ij} \in \{0,1\}$ מתאר את הספרה ה־j במספר $f(i)$.

כעת, כדי להראות ש־f איננה על אנחנו צריכים למצוא $b \in A$ שאין לו מקור, כלומר: $f(n) \neq b$ לכל n.

מספרים עשרוניים שבנויים רק מ$0,1$ שונים זה מזה אם הם יש ספרה שבה הם שונים. לכן, אנחנו רוצים להצביע על b ששונה מכל מספר ברשימה שלנו בספרה אחת לפחות. נעשה זאת באופן הבא (באמצעות האיברים ב"אלכסון") – המספר שאנחנו רוצים, $b = 0.b_1b_2b_3\ldots$ יוגדר כך: $b_i = 1 - a_{ii}$ (אם $a_{ii} = 1$ אז $b_i = 0$ ולהיפך). כך, המספר b שונה מכל מספר $f(i)$ (בספרה ה־i), ומצאנו b כנדרש.