תרגיל 5

2 במאי 2018

1. תהי $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ פונקציה קבועה. הוכיחו שהיא רציפה.
פתרון: נניח f קבועה ל b . כלומר לכל $x\in X$ מתקיים $f(x)=b$. כעת תהא V פתוחה ב Y. אזי

$$f^{-1}(V)=\begin{cases}X & \text{if } b\in V\\ \emptyset & \text{if } b\notin V\end{cases}$$

ובכל מקרה $f^{-1}(V)$ פתוחה ב X ולכן f רציפה.

2. תהי $f:(X,\tau_1)\to(Y,\sigma_1)$ פונקציה רציפה בין 2 מרחבים טופולוגיים. נניח כי $\tau_1\subseteq\tau_2$ ו $\sigma_2\subseteq\sigma_1$. הוכיחו כי

$$f:(X,\tau_2)\to(Y,\sigma_2)$$

היא גם רציפה. .
פתרון: תהי U קבוצה פתוחה ב σ_2. אזי היא פתוחה גם ב σ_1 היות ש $f:(X,\tau_1)\to(Y,\sigma_1)$ רציפה אז $f^{-1}(U)$ פתוחה ב τ_1 ולכן היא גם פתוחה ב τ_2. לכן $f:(X,\tau_2)\to(Y,\sigma_2)$ רציפה כנדרש. על אותו עקרון כל פונקציה $f:X\to Y$ לתוך מרחב טריויאלי Y היא רציפה (כי הפתוחות היחידות הן $\emptyset,Y$ והמקורות שלהן הם $X=f^{-1}(\emptyset)=\emptyset,f(Y)$ שהן פתוחות. כמו כן כל פונקציה $f:X\to Y$ מתוך מרחב דיסקרטי X היא רציפה כי המקור של כל קבוצה היא קבוצה פתוחה.

3. הוכיחו שכל פונקציה ממרחב דיסקרטי היא רציפה. כמו כן, כל פונקציה לתוך מרחב טריוויאלי רציפה.
פתרון: תהי $f:(X,\mathrm{disc})\to(Y,\tau')$ פונקציה . אזי לכל $U\in\tau'$ מתקיים כי $f^{-1}(U)\in\mathrm{disc}$ (כי $\mathrm{disc}=P(X)$) ולכן f רציפה.
תהי $f:(X,\tau)\to(Y,\{Y,\emptyset\})$ פונקציה . אזי $f^{-1}(Y)=X\in\tau$ וגם $f^{-1}(\emptyset)=\emptyset\in\tau$ ולכן התמונה הפוכה של כל קבוצה פתוחה ב Y היא פתוחה ב X. כלומר f רציפה.

4. תהא $f:(X,\tau)\to(Y,\tau')$ פונקציה. הוכיחו כי תמונה הפוכה של פתוחה היא פתוחה (שזה שקול לכך ש f רציפה) אמ"מ תמונה הפוכה של סגורה היא סגורה.
פתרון: $(\Leftarrow)$ תהא S סגורה ב Y צ"ל $f^{-1}(S)$ סגורה ב X. S^c פתוחה ב Y ולכן $f^{-1}(S^c)$ פתוחה ב X לפי נתון. אבל $f^{-1}(S^c)=\left[f^{-1}(S)\right]^c$ ולכן $f^{-1}(S)$ סגורה ב X.
$(\Rightarrow)$תהא O פתוחה ב Y צ"ל $f^{-1}(O)$ פתוחה ב X. O^c סגורה ב Y ולכן $f^{-1}(O^c)$ סגורה ב X לפי נתון. אבל $f^{-1}(O^c)=\left[f^{-1}(O)\right]^c$ ולכן $f^{-1}(O)$ פתוחה ב X.

5. תהי $f: X \to Y$ פונקציה רציפה, ויהי $A \subseteq X$. הוכיחו ש$f|_A : A \to Y$ רציפה.
פתרון: תהא V פתוחה ב Y צ"ל כי $f|_A^{-1}(V)$ פתוחה ב A. אכן $f|_A^{-1}(V) = f^{-1}(V) \cap A$ כיוון ש f רציפה $f^{-1}(V)$ פתוחה ב X ולכן $f|_A^{-1}(V) = f^{-1}(V) \cap A$ פתוחה ב A.

6. נניח ש$X = \cup_{i \in I} O_i$ איחוד כלשהוא של קבוצות פתוחות. ונניח שיש $f_i : O_i \to Y$ פונקציות רציפות שמזדהות על החיתוך. כלומר, לכל $i, j \in I$ מתקיים $f_i|_{O_i \cap O_j} = f_j|_{O_i \cap O_j}$. אז הפונקציה $f: X \to Y$ שמוגדרת ע"י הפונקציות f_i רציפה (באופן הבא: יהי $x \in X$. אז x שייך לאיזשהו O_i ואז נגדיר $f(x) = f_i(x)$. שימו לב שהפונקציה מוגדרת היטב. באופן שקול ופורמלי אפשר להגדיר $f = \cup_{i \in I} f_i$).
פתרון: תהא V פתוחה ב Y צ"ל כי $f^{-1}(V)$ פתוחה ב X. אכן $f^{-1}(V) = \cup_{i \in I} f_i^{-1}(V)$. כיוון שלכל i נתון כי f_i רציפה אזי $f_i^{-1}(V)$ פתוחה ב O_i, כלומר קיימת קבוצה פתוחה U_i ב X כך ש $f_i^{-1}(V) = U_i \cap O_i$ שגם היא פתוחה ב Xכיוון שהיא חיתוך של שתי קבוצות פתוחות. כעת $f^{-1}(V) = \cup_{i \in I} f_i^{-1}(V)$ פתוחה ב X כאיחוד כלשהוא של פתוחות.

7. נניח ש$X = C_1 \cup ... \cup C_n$ איחוד סופי של קבוצות סגורות. ונניח שיש $f_i : C_i \to Y$ פונקציות רציפות שמזדהות על החיתוך. כלומר, לכל $i, j \in I$ מתקיים $f_i|_{C_i \cap C_j} = f_j|_{C_i \cap C_j}$. אז הפונקציה $f: X \to Y$ שמוגדרת ע"י הפונקציות f_i רציפה (באופן הבא: יהי $x \in X$. אז x שייך לאיזשהו C_i ואז נגדיר $f(x) = f_i(x)$. שימו לב שהפונקציה מוגדרת היטב. באופן שקול ופורמלי אפשר להגדיר $f = \cup_{i \in I} f_i$).
פתרון: תהא S סגורה ב Y צ"ל כי $f^{-1}(S)$ סגורה ב X. אכן $f^{-1}(S) = \cup_{i=1}^n f_i^{-1}(S)$. כיוון שלכל i נתון כי f_i רציפה אזי $f_i^{-1}(S)$ סגורה ב C_i, כלומר קיימת קבוצה K_i סגורה ב X כך ש $f_i^{-1}(S) = C_i \cap K_i$ שגם היא סגורה ב X כיוון שהיא חיתוך של שתי קבוצות סגורות. כעת, $f^{-1}(S) = \cup_{i=1}^n f_i^{-1}(S)$ סגורה ב X כאיחוד סופי של סגורות.

8. (א) יהי (X, τ) מרחב טופולוגי. ניקח תתי קבוצות $Z \subseteq Y \subseteq X$. הטופולוגיה של X משרה טופולוגיות תת מרחב על Y שנסמנה τ_Y וזו משרה טופולוגית תת מרחב על Z שנסמנה $(\tau_Y)_Z$. הראו שזו בדיוק טופולוגית תת המרחב ש X משרה על Z שנסמנה τ_Z (אם הטענה הזאת הייתה לא נכונה היה מאוד קשה לדבר על תתי מרחבים).
פתרון: נוכיח בהכלה דו כיווית. נניח $A \in (\tau_Y)_Z$ כלומר $A = Z \cap U$ כאשר $U \in \tau_Y$. לפי הגדרה $U = Y \cap V$ כאשר $V \in \tau$. לכן

$$A = Z \cap U = Z \cap Y \cap V = Z \cap V$$

כאשר V פתוחה ב X. לפי הגדרה זה אומר ש $A \in \tau_Z$. מצד שני נניח $A \in \tau_Z$כלומר

$$A = Z \cap U$$

כאשר U פתוחה ב X. אז היות ש $Z \subseteq Y$ נקבל ש

$$A = Z \cap U = Z \cap Y \cap U$$

ולפי הגדרה $Y \cap U \in \tau_Y$ ולכן

$$A \in (\tau_Y)_Z$$

כנדרש. קיבלנו מה שרצינו.

(ב) הוכיחו כי טופולוגית תת מרחב של טופולוגיה קו־סופית היא בעצמה טופולוגיה קו־סופית. כלומר יהא (X,τ) כאשר $\tau=\{O\in P(X): |O^c|<\infty\}\cup\{\emptyset\}$ ויהא (A,τ_A) ת"מ טופלוגי אזי הוכיחו כי

$$\tau_A=\{O\in P(A): |O^c|<\infty\}\cup\{\emptyset\}$$

הדרכה: הוכיחו כי הקבוצות הסגורות לפי τ_A הן בדיוק תתי הקבוצות הסופיות של A איחוד A.

פתרון: תהי $S\subseteq A$ קבוצה סגורה אז

$$S=A\cap K$$

כאשר K סגורה ב X כלומר K סופית ולכן גם S סופית (או ש $K=X$ ואז $S=A\cap X=A$). מצד שני נניח ש $S\subseteq A$ סופית. אז

$$S=S\cap A$$

אבל S סגורה ב X (כי היא סופית) ולכן היא גם סגורה ב A (או ש $S=A$ ואז $S=A=X\cap A$). כנדרש.