תרגיל 6 - אינפי 3

29 בדצמבר 2016

שאלה 1

חשב את הנגזרות הכיווניות של פונקציה $f(x,y)$ בנקודה (x_0,y_0) בכיוון של הווקטור $\overline{u}$:

א) $f\left(x,y\right)=\begin{cases}\frac{x^{2}y}{x^{4}+y^{2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ כאשר $\left(x_{0},y_{0}\right)=\left(0,0\right)$ $\overline{u}=\left(1,1\right)$

פתרון:

נשים לב שהפונקציה לא דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$: על מסלול $y=0$ ו־$x\rightarrow0$ נקבל שהגבול הוא 0, ועל הפרבולה $y=x^{2}$ ו־$x\rightarrow0$ נקבל שגבול הוא $\frac{1}{2}$, ולכן פונקציה לא רציפה ב־$(0,0)$ ולכן לא דיפרנציאבילית. כדי לחשב נגזרת כיוונית נשתמש בהגדרה:

$\frac{\partial f(x_{0},y_{0})}{\partial\overline{u}}=lim_{h\rightarrow0}\frac{f(x_{0}+ha,y_{0}+hb)-f(x_{0},y_{0})}{h}$ כאשר וקטור h הוא וקטור הכיוון.

הערה: מקובל לנרמל את וקטור הכיוון כאשר האורך שלו לא חשוב לנו אלא רק הכיוון, אך אפשר גם לעבור עם הקטור לא מנורמל.

וקטור הכיוון שלנו הוא $(1,1)$, ננרמל אותו ונקבל $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ולכן:

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial\overline{u}}=lim_{h\rightarrow0}\frac{f\left(0+h\cdot\frac{1}{\sqrt{2}},0+h\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-f(0,0)}{h}=lim_{h\rightarrow0}\frac{\frac{\frac{1}{2}h^{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}h}{\frac{1}{4}h^{4}+\frac{1}{2}h^{2}}-0}{h}=\frac{1}{\sqrt{2}}lim_{h\rightarrow0}\frac{h^{3}}{h^{3}\left(\frac{1}{2}h^{2}+1\right)}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

ב) $f\left(x,y\right)=x^{2}y^{2}-xy^{3}-3y-1$ כאשר $\left(x_{0},y_{0}\right)=\left(1,1\right)$ $\overline{u}=\left(-2,-1\right)$

פתרון:

פונקציה $f\left(x,y\right)$ דיפרנציאבילית בסביבת הנקודה $\left(2,1\right)$ ולכן אפשר להשתמש בנוסחה לנגזרת כיוונית עבור פונקציה דיפ' שראינו בכיתה, וקטור היחידה בכיוון של $\overline{u}$ הוא $e=\left(-\frac{2}{\sqrt{5}},-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$. נחשב את הנגזרת המכוונת לפי הנוסחה:

$\frac{\partial f}{\partial \overline{u}}(2,1)=\frac{\partial f(2,1)}{\partial x}\cdot\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)+\frac{\partial f}{\partial y}(2,1)\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)=\left(2xy^2-y^3\right)|_{(2,1)}\cdot\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)+$
$\left(2x^2y-3xy^2-3\right)|_{(2,1)}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)=-\frac{5}{\sqrt{5}}=-\sqrt{5}$

ג) $f(x,y)=ln\left(x^2+y^2\right)$ כאשר $(x_0,y_0)=(1,1)$ $\overline{u}=(1,-1)$

פתרון:

הפונקציה דיפרנציאבילית בסביבת נק' $(1,1)$ וקטור היחידה בכיוון של $\overline{u}$ הוא $e=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. נחשב את נגזרת המכוונת לפי הנוסחה:

$\frac{\partial f}{\partial \overline{u}}(1,1)=\frac{\partial f(1,1)}{\partial x}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\partial f(1,1)}{\partial y}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{2x}{x^2+y^2}|_{(1,1)}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{2y}{x^2+y^2}|_{(1,1)}\cdot$
$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}=0$

שאלה 2

תהי $f(x,y)$ פונקציה דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$ ומקיימת

$lim_{t\to0}\left(\frac{f(t,t)-f(t,-t)}{t}\right)=1$, מצא את $f_y(0,0)$.

פתרון:

נשים לב ש:

$1=lim_{t\to0}\frac{f(t,t)-f(t,-t)}{t}=lim_{t\to0}\frac{f(t,t)-f(0,0)+f(0,0)-f(t,-1)}{t}=lim_{t\to0}\frac{f(t,t)-f(0,0)}{t}-$
$lim_{t\to0}\frac{f(t,-t)-f(0,0)}{t}=\frac{\partial f}{\partial \overline{n_1}}(0,0)-\frac{\partial f}{\partial \overline{n_2}}f(0,0)$, כאשר $\overline{n_1}=(1,1)$ ו־$\overline{n_2}=(1,-1)$.

בגלל ש־f דיפרנציאבילית ב־$(0,0)$ אנו יודעים כי

$\frac{\partial f}{\partial \overline{n_1}}(0,0)=f_x(0,0)\cdot1+f_y(0,0)\cdot1$, $\frac{\partial f}{\partial \overline{n_2}}(0,0)=f_x(0,0)\cdot1+f_y(0,0)\cdot(-1)$

ולכן $1=\frac{\partial f}{\partial \overline{n_1}}(0,0)-\frac{\partial f}{\partial \overline{n_2}}(0,0)=2f_y(0,0)$ ולכן מקבלים $f_y(0,0)=\frac{1}{2}$.

שאלה 3

מה הכיוון מהנקודה $(2,1,-1)$ שבו הנגזרת של $f(x,y,z)=x^2yz^3$ תהי מקסימלית?

פתרון:

f היא פונקציה דיפ' בכל $\mathbb{R}^3$ ובפרט בנקודה $(2,1,-1)$ כי כל הנגזרות החלקיות שלה קיימות ורציפות בכל נקודה ממשית, ולכן הנגזרת תהיה מקסימלית בכיוון וקטור הגרדיאנט שלה.

$\frac{\partial f}{\partial x}(2,1,-1)=2xyz^3|_{(2,1,-1)}=-4$

$\frac{\partial f}{\partial y}(2,1,-1)=x^2z^3|_{(2,1,-1)}=4\cdot(-1)$

$\frac{\partial f}{\partial z}(2,1,-1)=3x^2yz^2|_{(2,1,-1)}=3\cdot4=12$

ולכן $\nabla f\left(2,1,-1\right)=\left(-4,-4,12\right)$. מה שמעניין אותנו בשאלה זה הכיוון ולא האורך של הוקטור ולכן ננרמל את ∇f ונקבל את וקטור הכיוון:

$\left\Vert \nabla f\left(2,1,-1\right)\right\Vert =\sqrt{16+16+12}=\sqrt{48}=4\cdot\sqrt{3}$, ולכן וקטור הכיוון הינו $\frac{\nabla f\left(2,1,-1\right)}{\left\Vert \nabla f\left(1,1,-1\right)\right\Vert }=\left(\frac{-\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3},\sqrt{3}\right)$

שאלה 4

תהי $f:\mathbb{R}^{2}\rightarrow\mathbb{R}$ פונקציה דיפרנציאבילית בכל המישור $\mathbb{R}^{2}$. נתון $\frac{\partial f}{\partial v}\left(7,1\right)=3$, $\frac{\partial f}{\partial u}\left(7,1\right)=2$.

נגדיר $u\left(x,y\right)=2x+3$, $v\left(x,y\right)=x-y$, $z\left(x,y\right)=f\left(u\left(x,y\right),v\left(x,y\right)\right)$, חשב $\frac{\partial z}{\partial x}\left(2,1\right)$ ואת $\frac{\partial z}{\partial y}\left(2,1\right)$.

פתרון:

תוך שימוש בכלל השרשרת נקבל:

$$\frac{\partial z}{\partial x}\left(2,1\right)=\frac{\partial f}{\partial u}\left(7,1\right)\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\left(2,1\right)+\frac{\partial f}{\partial v}\left(7,1\right)\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\left(2,1\right)=2\cdot2+3\cdot1=7$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}\left(2,1\right)=\frac{\partial f}{\partial u}\left(7,1\right)\frac{\partial u}{\partial y}\left(2,1\right)+\frac{\partial f}{\partial v}\left(7,1\right)\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\left(2,1\right)=2\cdot3+3\cdot\left(-1\right)=3$$

שאלה 5

חשב נגזרות החלקיות של הפונקציה הבאה: $z=f\left(u,v\right)$, $u=x^{2}-y^{2}$, $v=xy$.

פתרון:

כמו בשאלה הקודמת נשתמש בכלל השרשרת:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot2x+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial f}{\partial u}\cdot2y+\frac{\partial f}{\partial v}x$$

שאלה 6

נגדיר $\phi\left(x,y,z\right)=f\left(x^{2}z-yz\right)$, הוכח כי $x\frac{\partial\phi}{\partial x}+2y\frac{\partial\phi}{\partial y}-2z\frac{\partial\phi}{\partial z}=0$.

פתרון:

נסמן ב־$t=x^{2}z-yz$ ונשתמש בכלל השרשרת:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial x}=f^{'}\left(x^{2}z-yz\right)\cdot\left(2xz\right)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial y}=f^{'}\left(x^{2}z-yz\right)\left(-z\right)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{\partial z}{\partial z}=f^{'}\left(x^{2}z-yz\right)\left(x^{2}-y\right)$$

ולכן $x\cdot\frac{\partial\phi}{\partial x}+2y\cdot\frac{\partial\phi}{\partial y}-2z\cdot\frac{\partial\phi}{\partial z}=f^{'}\left(x^{2}z-yz\right)\left(2x^{2}z-2yz-2x^{2}z+2yz\right)=0$

שאלה 7

תהי הפונקציה $f(x,y)$ בעלת נגזרות חלקיות רציפות בכל המישור ו־$\frac{\partial f}{\partial x}(-3,6)=-2$, $\frac{\partial y}{\partial y}(-3,6)=1$ ויהיו $x=u^2-v^2$, $y=u^2vw$, נגדיר פונקציה מורכבת $\phi(u,v,w)=f\left(u^2-v^2,u^2vw\right)$, חשב $\frac{\partial\phi}{\partial u}$, $\frac{\partial\phi}{\partial v}$, $\frac{\partial\phi}{\partial w}$.

פתרון:

פונקציה f היא דיפרנצאיבילית כי היא בעלת נגזרות חלקיות רציפות הכל המישור ולכן כדי לגזור אותה נשתמש בכלל השרשרת:

קודם כל נשים לב שנקודה $(-3,6)$ מתקבלת אם $u=\pm1$,$v=2$ ו־$w=3$ או $v=-2$ ו־$w=-3$, נקבל:

$$\frac{\partial\phi}{\partial u}(1,2,3)=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\,|_{(1,2,3)}=-2\cdot2u+2uv\,|_{(1,2,3)}=-4+6=2$$

באותו אופן נמצא את הנגזרות בנקודות: $(\pm1,-2,-3)$, $(-1,2,3)$

$$\frac{\partial\phi}{\partial v}(1,2,3)=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}\,|_{(1,2,3)}=2v+u^2w=4+3=7$$

באופן דומה נמצא את הנגזרת בשאר הנקודות

$$\frac{\partial f}{\partial w}(1,2,3)=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial w}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial w}\,|_{(1,2,3)}=u\,|_{(1,2,3)}=1$$

באותו אופן נמצא את הגזרת בשאר הנקודות